GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

LECCIONES

DADAS EN LAS ESCUELAS NORMALES

EN EL AÑO TERCERO DE LA REPÚBLICA,

POR GASPAR MONGE, DEL INSTITUTO NACIONAL.

TRADUCIDAS AL CASTELLANO

PARA EL USO DE LOS ESTUDIOS

DE LA INSPECCION GENERAL DE CAMINOS.

DE ÓRDEN SUPERIOR.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL
AÑO DE 1803.

TABLA

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE VOLUMEN.

Para librar á la Nacion Francesa de la dependencia en que hasta hoy ha vivido de la industria extrangera necesitamos en primer lugar dirigir la educacion nacional hácia el conocimiento de los objetos que exîgen exâctitud, lo que hasta nuestros dias se ha descuidado en un todo, y acostumbrar las manos de nuestros artistas al manejo de todo género de instrumentos, que enseñan á trabajar con precision, y á medir los grados diferentes del trabajo; entonces los consumidores, sabiendo apreciar la exâctitud, la podrán exîgir en todas las cosas, y estimarlas por su justo precio; y nuestros artistas, familiarizados con ella desde su niñez, se hallarán en estado de alcanzarla.

Es preciso en segundo lugar hacer popular el conocimiento de un gran número de fenómenos naturales indispensables al progreso de la industria, y aprovecharnos para el adelantamiento de la instruccion general de la Nacion de la circunstancia feliz en que se halla de tener á su disposicion los principales recursos que le son necesarios.

Y en fin, difundir entre nuestros artistas el conocimiento de los procedimientos de las artes, y el de las máquinas que tienen por objeto, ó disminuir la mano de obra, ó dar á los resultados del trabajo mas uniformidad y precision; y en quanto á esto es preciso confesar que tenemos mucho que aprender de las naciones extrangeras.

Todas estas miras solo se conseguirán dando á la educacion nacional una direccion nueva.

Familiarizando desde luego con el uso de la geometría descriptiva á todos los jóvenes de talento, tanto á los que tienen bienes de fortuna, para que algun dia puedan hacer de sus capitales un empleo mas útil á sí y á la nacion, como á aquellos que no tienen mas que su educacion, á fin de que puedan dar á su trabajo mayor precio.

Este arte tiene dos objetos principales.

El primero es representar con exâctitud sobre los diseños de dos dimensiones los objetos que tienen tres, y que son susceptibles de una determinacion rigurosa.

Baxo este punto de vista es una lengua necesaria al hombre de genio que concibe un proyecto, á los que deben dirigir su execucion, y en fin á los artistas que por sí mismos deben executar sus partes diferentes.

El segundo objeto de la geometría descriptiva es deducir de la descripcion exâcta de los cuerpos todo quanto se sigue necesariamente de sus formas y de sus posiciones respectivas. En este sentido es un medio de investigar la verdad; ofrece exemplos continuamente del paso de lo conocido á lo desconocido, y porque se halla siempre aplicada á objetos susceptibles de la mayor evidencia, es necesario que entre en el plan de la educacion nacional. No solamente es á propósito para exercitar las facultades intelectuales de un gran pueblo; y por lo mismo contribuir á la perfeccion de la especie humana, sino que tambien es indispensable á todos los obreros, cuyo objeto es dar á los cuerpos ciertas formas determinadas; y los progresos tan lentos de nuestra industria se deben atribuir á que los métodos de este arte se han difundido hasta ahora muy poco, ó casi se descuidáron enteramente.

La educacion nacional pues recibirá una direccion ventajosa familiarizando nuestros jóvenes artistas con la aplicacion de la geometría descriptiva á las construcciones gráficas que son necesarias al mayor número de artes, y haciendo uso de esta geometría para la representacion y la determinacion de los elementos de las máquinas, por medio de las quales el hombre, poniendo en contribucion las fuerzas de la naturaleza, no se reserva, por decirlo así, en sus operaciones otro trabajo que el de su inteligencia.

No es menos ventajoso derramar el conocimiento de los fenómenos de la naturaleza, que pueden convertirse en provecho de las artes.

El encanto que les acompaña podrá vencer la repugnancia que en general tienen los hombres á la meditacion intensa, y hará que hallen placer en el exercicio de su inteligencia, que casi todos miran como penoso y fastidioso.

Así que, en la escuela normal debe haber un curso de geometría descriptiva.

Pero como no tengamos ninguna obra elemental buena sobre este arte, ya sea porque hasta ahora los sabios la hayan creido de poco interes, ó ya porque la hayan practicado de un cierto modo obscuramente algunos ciudadanos, de cuya educacion no se ha cuidado bastantemente, y que no sabian comunicar los resultados de sus meditaciones, un curso simplemente oral de ningun modo lograria su fin.

Es pues necesario para el curso de geometría descriptiva que se reunan la práctica y la execucion con la viva voz de los maestros.

Así aquellos de los ciudadanos, cuyos estudios anteriores se hayan dirigido á la geometría ú otras ciencias exâctas, se exercitarán en las salas particulares de las construcciones gráficas de la geometría descriptiva.

Dos partes de este arte tienen métodos generales con que se familiarizarán los ciudadanos valiéndose de la regla y del compas, sin los quales sería difícil que llegasen á poderla enseñar ellos mismos.

Entre las diferentes aplicaciones que puede hacerse del método de proyecciones hay dos notables por su generalidad y por lo que tienen de ingeniosas, quales son las construcciones de la perspectiva y la determinacion rigurosa de las sombras en los diseños. Estas dos partes se pueden considerar como el complemento del arte de describir los objetos. Se exercitará en ellas á los ciudadanos, porque siendo su destino enseñar algun dia los procedimientos de la geometría descriptiva, es necesario que conozcan todos sus recursos.

En seguida el método de las proyecciones se aplicará á las construcciones gráficas necesarias al mayor número de las artes, tales como la del cantero, carpintero &c.

En fin, lo demas del curso se empleará al principio en la descripcion de los elementos de las máquinas, á fin de estudiar sus formas y efectos, y despues en las máquinas cuyo uso es muy importante difundir, sea que tengan por objeto dar al trabajo mas precision y uniformidad, ó sea que tengan por fin emplear en la produccion de un cierto trabajo las fuerzas de la naturaleza, y por esto aumentar el poder nacional.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

I.

1 La geometría descriptiva tiene dos objetos: el primero es dar métodos para representar sobre un papel de dibuxo, que no tiene mas de dos dimensiones, á saber, longitud y latitud; todos los cuerpos de la naturaleza, que tienen tres, longitud, latitud y profundidad, con tal que estos cuerpos puedan ser determinados rigurosamente.

El segundo objeto es dar el modo de reconocer por medio de una exâcta descripcion las formas de los cuerpos, y deducir todas las verdades que resultan, bien sean de sus formas, bien de sus posiciones respectivas.

Vamos primeramente á indicar los procederes que una larga experiencia ha hecho descubrir, para llenar el primero de estos dos objetos; luego darémos el modo de llenar el segundo.

2 Pudiéndose considerar las superficies de todos los cuerpos como compuestas de puntos, el primer paso que vamos á dar en esta materia debe ser indicar el modo de representar la posicion de un punto en el espacio.

El espacio no tiene límites; todas sus partes son perfectamente semejantes, nada tienen que las caracterice, y ninguna de ellas puede servir de término de comparacion para indicar la posicion de un punto.

Así, para determinar la posicion de un punto en el espacio, es indispensable referirla á otros objetos, distintos de las partes del espacio que les encierran, y cuyas posiciones sean conocidas, así del que determina como del que quiere saber su posicion; y para poder hacer el proceder de un uso fácil y comun es menester que estos objetos sean lo mas simples que pueda ser, y que se conciba fácilmente su posicion.

3 Entre todos los objetos simples vamos á buscar quáles son los que presentan mas facilidad para determinar la posicion de un punto; y como en la geometría nada hay mas simple que un punto, exâminarémos á qué especie de consideraciones se llegaria, si para determinar la posicion de un punto se le refiriese á un cierto

número de otros puntos cuya posicion fuese conocida; en fin, para exponer esto con mayor claridad, indicarémos estos puntos conocidos por las letras A, B, C &c.

Supongamos primeramente, que por el supuesto la posicion de un punto exîge se halle á una vara de distancia del punto conocido A.

Todo el mundo sabe que la propiedad de la superficie de la esfera es tener todos sus puntos á igual distancia de su centro. Así esta parte del supuesto expresa que el punto que se quiere determinar tiene la misma propiedad que todos los de la superficie de una esfera cuyo centro estaria en el punto A, y cuyo radio seria una vara. Pero los puntos de la superficie de la esfera son los únicos en todo el espacio que tienen esta propiedad; pues todos los puntos del espacio que se hallan mas allá de la superficie respecto del centro, distan mas de una vara de este, y todos los que se hallan entre esta superficie y el centro distan de él menos de una vara: luego todos los puntos de la superficie de la esfera no solamente gozan de la propiedad enunciada en la proposicion, sino que son los únicos que gozan de ella: luego en fin esta proposicion indica que el punto buscado es uno de los de la superficie de una esfera cuyo centro estaria en A, y cuyo radio seria una vara. De este modo dicho punto se distingue actualmente de una infinidad de otros colocados en el espacio; pero se confunde aun con todos los que componen la superficie de la esfera: se necesitan pues otras condiciones para distinguirle de estos.

Supongamos despues que, segun el supuesto, la posicion del punto deba hallarse á dos varas de distancia del segundo punto conocido B; es evidente que haciendo el mismo raciocinio respecto á esta segunda condicion, que respecto á la primera, el punto debe aun ser uno de los de la superficie de una segunda esfera, cuyo centro estuviese en B, y cuyo radio fuese dos varas. Este punto, debiéndose hallar al mismo tiempo sobre la superficie de la primera esfera, y sobre la de la segunda, no puede confundirse ya sino con los que son comunes á las dos superficies, y que se hallan en su interseccion comun: por poco familiarizado que se esté con los principios de geometría, se sabe que la interseccion de dos esferas es la circunferencia de un círculo, cuyo centro se halla sobre la línea que une los de las dos esferas, y cuyo plano es perpendicular á esta recta: luego, en virtud de estas dos condiciones, el punto que se busca se distingue de los que estan sobre las superficies de las dos esferas, y no puede confundirse sino con los de la circunferencia de un círculo, que gozan todos exclusivamente de las condiciones enunciadas; se necesita pues aun una tercera condicion para distinguirlo.

Supongamos finalmente que el punto deba hallarse á tres varas de distancia de un tercer punto C conocido. Esta tercera condicion le coloca entre todos los de la superficie de una tercera esfera, cuyo centro estuviese en C, y cuyo radio fuese tres varas. Y como hemos visto que debe hallarse sobre la circunferencia de un círculo de posicion conocida, para satisfacer al mismo tiempo á las tres condiciones, es menester que sea uno de los puntos comunes á la superficie de la tercera esfera y á la circunferencia del círculo; pero se sabe que la circunferencia de un círculo y la superficie de una esfera no pueden cortarse sino en dos puntos: luego, en virtud de las tres condiciones, el punto se distingue de todos los del espacio, y no puede ser sino uno de los dos puntos determinados; de suerte que indicando ademas de qué lado se halla colocado respecto al plano que pasa por los tres centros, este punto está enteramente determinado, y no puede confundirse ya con ningun otro.

Se ve que empleando, para determinar la posicion de un punto en el espacio, sus distancias á puntos conocidos, los quales necesariamente deben de ser tres, nos vemos conducidos á consideraciones que no son bastante simples para servir de base á los procedimientos de un uso freqüente.

4 Busquemos ahora quáles serian las condiciones que encontrariamos, si en lugar de referir la posicion de un punto á otros tres conocidos, se la refiriese á líneas rectas dadas de posicion.

Harémos observar de antemano que una línea recta no debe jamas considerarse como terminada, y que siempre se la puede prolongar indefinidamente hácia una y otra parte de su direccion.

Para simplificar llamarémos sucesivamente A, B, C &c. las rectas que nos verémos obligados á emplear.

Si por el supuesto resulta que la posicion del punto debe de hallarse, por exemplo, á una vara de distancia de la primera recta conocida A, es lo mismo que decir que este punto es uno de los de la superficie de un cilindro de base circular, cuyo exe seria la recta A, su radio igual á una vara, y que estaria prolongado indefinidamente en los dos sentidos de su longitud; pues todos los puntos de esta superficie gozan de la propiedad enunciada por el supuesto, y la gozan exclusivamente. De este modo el punto se distingue de todos los otros puntos del espacio que se hallan fuera ó dentro de la superficie del cilindro, con los quales únicamente puede confundirse, y de entre los quales solo podrá distinguirse por medio de nuevas condiciones.

Supongamos pues que el punto que se busca deba ademas hallarse colocado á dos varas de distancia de la segunda recta B: se ve igualmente que de este modo se coloca este punto sobre la superficie de un segundo cilindro, cuya base es circular, que tiene B por exe, y cuyo radio seria igual á dos varas; pero se confunde con los puntos de dicha superficie si se considera solamente la segunda condicion. Reuniendo las dos condiciones, debe hallarse al mismo tiempo sobre la superficie de ámbos cilindros; por consiguiente no puede ser sino uno de los puntos de su comun seccion. Esta línea, sobre la qual debe hallarse el punto, participa de la curvatura de la superficie del primer cilindro y de la del segundo, y es en general del género de aquellas que se llaman curvas de doble curvatura.

Para distinguir el punto de todos los que forman esta línea es menester una tercera condicion.

Supongamos en fin que por el supuesto el punto pedido debe hallarse aun á tres varas de distancia de una tercera línea recta C.

Esta nueva condicion manifiesta que es uno de los de una superficie de un tercer cilindro de base circular, cuyo exe seria la tercer línea recta C, y cuyo diámetro seria igual á tres varas: luego reuniendo estas tres condiciones, el punto que se busca no puede ser sino uno de aquellos que son comunes á la tercera superficie cilíndrica, y á la curva de doble curvatura, interseccion de los dos primeros. Esta curva puede ser cortada en general por la tercera superficie cilíndrica en ocho puntos: luego las tres condiciones reducen el punto que se busca á ser uno de los ocho puntos determinados, y entre los quales no se le puede distinguir sino por medio de algunas condiciones particulares como aquellas de que hemos dado un exemplo en el caso de los puntos.

Se ve que las consideraciones por que ha sido necesario pasar para determinar la posicion de un punto en el espacio, por medio del conocimiento de sus distancias á tres líneas rectas conocidas, son mucho menos simples que aquellas á que diéron lugar sus distancias á tres puntos, y que por consiguiente son menos útiles para servir de base á métodos de que debe hacerse uso con freqüencia.

5 Entre los objetos simples que considera la geometría es menester notar particularmente: 1.º el punto que no tiene dimension alguna: 2.º la línea recta que no tiene mas de una: 3.º el plano que

tiene dos. Veamos si seria mas simple determinar la posicion de un punto por medio de sus distancias referidas á planos conocidos, que no emplear sus distancias á puntos ó á líneas rectas dadas.

Supongamos pues que haya en el espacio planos no paralelos, conocidos de posicion, y que indicarémos sucesivamente por las letras A, B, C, D &c.

Si en virtud del supuesto la posicion de un punto debe de hallarse, por exemplo, á una vara de distancia del primer plano A, sin expresar de qué lado de este plano debe hallarse, se enuncia que es uno de los que pertenecen á dos planos paralelos al plano A, situados el uno á un lado y el otro al otro de dicho plano, y distantes del de una vara; pues todos los puntos de estos dos planos paralelos satisfacen á la condicion indicada, y son los únicos de todos los del espacio que puedan satisfacerla.

Para distinguir, entre todos los puntos de estos dos planos, aquel cuya posicion quiere determinarse, es menester aun recurrir á otras condiciones.

Supongamos, en segundo lugar, que el punto que se busca deba hallarse á dos varas de distancia del segundo plano B; de este modo se halla colocado sobre dos planos paralelos al plano B, ámbos distantes dos varas de él, el uno hácia una parte, el otro hácia la otra. Para satisfacer al mismo tiempo á las dos condiciones es menester pues que se halle sobre uno de los planos paralelos al plano A, y sobre uno de los planos paralelos al plano B, por consiguiente que sea uno de los puntos de la comun interseccion de estos quatro planos. Pero la comun interseccion de quatro planos paralelos de dos en dos y de posiciones conocidas es el sistema de quatro líneas rectas conocidas igualmente de posicion: luego considerando al mismo tiempo estas dos condiciones, el punto no se halla ya confundido con todos los del espacio, ni aun con todos los de los quatro planos, sino solamente con los de quatro líneas rectas. En fin, si el punto debe tambien hallarse á tres varas de distancia del tercer plano C, esto indica que debe ser uno de los que pertenecen á otros dos planos paralelos al plano C, y situados á ámbas partes de él, á la distancia de tres varas. Así, en virtud de las tres condiciones, debe hallarse al mismo tiempo sobre uno de los dos últimos planos, y sobre una de las quatro líneas rectas, intersecciones de los quatro planos primeros; por consiguiente no puede ser otro que uno de los puntos comunes á uno de estos dos planos, y á una de las quatro líneas rectas. Cada uno de los dos planos, teniendo un punto comun con cada una de las quatro rectas; hay ocho puntos en el espacio que satisfacen al mismo tiempo á las tres condiciones: luego, en virtud de estas tres condiciones juntas, el punto pedido no puede ser sino uno de los ocho puntos determinados, y entre los quales no es posible el distinguirlo sino por medio de algunas consideraciones particulares.

Por exemplo, si al indicar la distancia al primer plano A se expresa tambien en qué sentido respecto á él, debe tomarse la distancia; en lugar de dos planos paralelos al plano A, no hay mas que uno que deba considerarse, y es aquel que se halla situado respecto de él al lado hácia el qual debe medirse la distancia. Del mismo modo, si se indica en qué sentido debe tomarse la distancia respecto al segundo plano, se excluye la consideracion de uno de los dos planos paralelos al segundo; y no queda mas de uno cuyos puntos satisfagan á la segunda condicion; y reuniendo estas condiciones, el punto no puede hallarse sobre las quatro rectas de interseccion de quatro planos paralelos dos en dos, sino solamente sobre la interseccion de dos planos: esto es, sobre una línea recta conocida de posicion. En fin, si se indica tambien de qué lado debe hallarse el punto respecto al tercer plano, de dos planos paralelos al tercero no habrá mas que uno cuyos puntos satisfagan á la última condicion; y para satisfacer al mismo tiempo á las tres condiciones, el punto deberá hallarse en la interseccion de este tercer plano con la sola recta, interseccion de los dos primeros. Por consiguiente no podrá ya confundirse con ningun otro en el espacio, y se hallará enteramente determinado.

Se ve pues que, aunque respecto al número de sus dimensiones, el plano sea un objeto menos simple que la línea recta, que no tiene mas de una, y que el punto, que no tiene ninguna, presenta no obstante mas facilidad que el punto y la línea recta para la determinacion de un punto en el espacio; este es el proceder que se emplea ordinariamente en la aplicacion del álgebra á la geometría, en la qual, para buscar la posicion de un punto, se acostumbra á buscar sus distancias á tres planos conocidos de posicion.

Pero en la geometría descriptiva, que mucho tiempo antes habian puesto en uso un gran número de hombres, para quienes el tiempo era precioso, se han simplificado aun los procederes; y en lugar de la consideracion de tres planos, se ha llegado, por medio de proyecciones, á no tener necesidad explícitamente sino de dos.

6 Llámase proyeccion de un punto sobre un plano el ex-

tremo de la perpendicular baxada desde el punto al plano.

Sentado esto, si se tienen dos planos de posicion conocida en el espacio, y si sobre cada uno de estos planos se da la proyeccion del punto cuya posicion quiere determinarse, este punto se hallará perfectamente determinado.

En efecto, si por la proyeccion sobre el primer plano se concibe una perpendicular á este plano, es evidente que pasará por el punto que quiere determinarse; igualmente si por su proyeccion sobre el segundo plano se concibe una perpendicular sobre este plano, pasará igualmente por dicho punto: luego este punto se hallará al mismo tiempo sobre dos líneas rectas de posicion conocida en el espacio, será por consiguiente el solo punto de su interseccion, y en fin se hallará perfectamente determinado.

En los párrafos siguientes se indicarán los medios de hacer este proceder de un uso fácil y de tal naturaleza, que pueda ser empleado sobre un papel.

7 *Fig. 1.* Si de todos los puntos de una línea recta indefinida AB, colocada de un modo qualquiera en el espacio, se conciben perpendiculares baxadas sobre el plano LMNO, dado de posicion, todos los puntos en que estas perpendiculares encuentran al plano estarán en una misma línea recta indefinida *ab*; pues todas estarán comprehendidas en el plano tirado por AB perpendicular al plano LMNO, y no podrán encontrar este último sino en la interseccion comun de los dos planos, que, como se sabe, es una línea recta.

La recta *ab*, que pasa de este modo por las proyecciones de todos los puntos de otra recta AB sobre el plano LMNO, es lo que se llama la proyeccion de la recta AB sobre este plano.

Como dos puntos bastan para determinar la posicion de una línea recta, para construir la proyeccion de una recta basta construir la de dos de sus puntos, y la recta tirada por las proyecciones de estos dos puntos será la proyeccion pedida.

De aquí se sigue, que si la recta propuesta es perpendicular al plano de proyeccion, su proyeccion se reducirá á un solo punto, que será el de su contacto con el plano.

Fig. 2. Dadas, sobre dos planos no paralelos LMNO, LMPQ, las proyecciones *ab*, $a'b'$, de una misma recta indefinida AB, esta recta queda determinada; pues, si por una de las proyecciones *ab* se concibe un plano perpendicular á LMNO, este plano, de posicion conocida, pasará necesariamente por la recta AB; igualmente, si por la otra proyeccion $a'b'$ se concibe un plano perpendicular á LMPQ, este plano, de posicion conocida, pasará

por la recta AB. La posicion de esta recta, que se halla al mismo tiempo sobre dos planos conocidos, y por consiguiente en su comun interseccion, quedará enteramente determinada.

8 Lo que acabamos de decir es independiente de la posicion de los planos de proyeccion, y se verifica igualmente, qualquiera que sea el ángulo que estos dos planos formen entre sí. Pero si el ángulo que forman los dos planos de proyeccion es muy obtuso, el que forman entre sí los que les son perpendiculares es muy agudo; y en la práctica pequeños errores podrian producirlos muy grandes en la determinacion de la posicion de la recta. Para evitar esta causa de inexâctitud se hace siempre de modo que los planos de proyeccion sean perpendiculares entre sí, á menos que no se tome otro partido obligado por algunas consideraciones que presenten grandes facilidades. Ademas, como la mayor parte de los artistas que hacen uso del método de las proyecciones estan muy familiarizados con la posicion de un plano horizontal, y con la direccion del hilo á plomo, acostumbran á suponer que de los dos planos de proyeccion el uno sea horizontal y el otro vertical.

La necesidad de hacer de modo que en los dibuxos las dos proyecciones se hallen sobre el mimo papel, y que en las operaciones en grande esten sobre una misma superficie, ha determinado aun á los artistas á concebir que el plano vertical ha girado al rededor de su interseccion con el plano horizontal, como charnela, para doblarse sobre el plano horizontal, y no formar con él sino un solo y mismo plano, y á construir sus proyecciones en este estado.

Así la proyeccion vertical está siempre trazada absolutamente sobre un plano horizontal, y es menester siempre figurarse que se halla levantada y puesta en su lugar por medio de un quarto de revolucion al rededor de la interseccion del plano horizontal con el plano vertical. Para esto es menester que esta interseccion esté trazada de un modo muy patente sobre el dibuxo.

Así en la *figura 2* la proyeccion $a'b'$ de la recta AB no se executa sobre un plano realmente vertical: se concibe que este plano ha girado al rededor de la recta LM para aplicarse en LMP'Q'; y en esta posicion del plano es en la que se executa la proyeccion vertical $a'b'$.

Ademas de las facilidades que presenta esta disposicion en la execucion tiene aun la ventaja de abreviar el trabajo de las proyecciones. En efecto, supongamos que los puntos a, a' sean las proyecciones horizontal y vertical del punto A, el plano tirado por las rectas Aa, Aa' será al mismo tiempo perpendicular á los dos planos de proyeccion, puesto que pasa por rectas que les son perpendiculares; por consiguiente será tambien perpendicular á su comun interseccion LM; y las rectas aC, a'C, segun las quales cortan á estos dos planos, serán perpendiculares á LM.

Quando el plano vertical gira al rededor de LM como charnela, la recta a'C no cesa, durante este movimiento, de ser perpendicular á LM; y lo es aun quando el plano vertical, llegándose á doblar, la recta ha tomado la posicion Ca''. Luego las dos rectas aC, Ca'', pasando ámbas por el punto C, y siendo la una y la otra perpendiculares á LM, se hallan en sus prolongaciones respectivas: lo mismo sucede con las líneas bD, Db'', respecto á qualquier otro punto como B. De donde se sigue que, si se tiene la proyeccion horizontal de un punto, la proyeccion de este mismo punto sobre el plano vertical suponiéndole doblado se hallará en la recta, tirada por la proyeccion horizontal perpendicularmente á la interseccion LM de los dos planos de proyeccion, y recíprocamente.

Este resultado es de un uso muy freqüente en la práctica.

9 *Fig.* 2. Hasta ahora hemos mirado la línea AB como indefinida, y por consiguiente no hemos tenido que ocuparnos sino de su direccion; pero puede suceder que esta línea sea considerada como terminada por dos de sus puntos A y B, y entonces se puede ademas tener necesidad de conocer su tamaño. Veamos cómo podemos deducirlo por medio de sus dos proyecciones.

Quando una recta es paralela á uno de los dos planos sobre los quales se halla proyectada, su longitud es igual á la de su proyeccion sobre este plano; pues la recta y su proyeccion, hallándose ámbas terminadas por dos perpendiculares al plano de proyeccion, son paralelas entre sí, y estan comprehendidas entre paralelas. Así en este caso particular, dada la proyeccion, tambien se da la longitud de la recta que le es igual.

Se está seguro de que una recta es paralela á uno de los dos planos de proyeccion quando su proyeccion sobre el otro es paralela al primero de estos dos planos.

Si la recta es al mismo tiempo obliqua á los dos planos, su longitud es mayor que la de cada una de las proyecciones; pero puede deducirse de un modo muy simple.

Fig. 2. Sea AB la línea recta, cuyas dos proyecciones ab, $a'b'$ sean dadas, y cuya longitud sea menester hallar; si por uno de sus extremos A, y en el plano vertical que pasa por la recta, se concibe la horizontal AE, prolongada hasta que encuentre en E la vertical baxada del otro extremo, se formará un triángulo rectángulo AEB, que se trata de construir para tener la longitud de la recta AB, que es la hipotenusa. Pero en este triángulo, ademas del ángulo recto, se conoce el lado AE que es igual á la proyeccion dada *ab*. Ademas, si en el plano vertical se tira por el punto *a'* una horizontal *a'e*, que será la proyeccion de AE, cortará la vertical *b'*D, en un punto *e*, que será la proyeccion del punto E. Así *b'e* será la proyeccion vertical de BE, y será por consiguiente igual á ella en longitud. Luego, conociendo los dos lados del ángulo recto, será fácil construir el triángulo cuya hipotenusa dará la longitud de AB.

La *figura 2*, estando en perspectiva, no tiene ninguna relacion con las construcciones del método de las proyecciones: vamos á dar aquí la construccion de esta primera qüestion en toda su sencillez.

Fig. 3. Suponiendo que LM sea la interseccion de los dos planos de proyeccion, y las rectas *ab*, *a''b''* las proyecciones dadas de una línea recta; para hallar la longitud de esta recta, se tirará por el punto *a''* la horizontal indefinida H*e*, que cortará la recta *bb''* en un punto *e*, y sobre la qual, contando desde este punto, se trasladará *ab* de *e* á H. Se tirará la hipotenusa H*b''*, y la longitud de esta hipotenusa será la de la recta pedida.

Como los dos planos de proyeccion son rectangulares, la operacion que acaba de hacerse sobre uno de estos planos podia haberse hecho sobre el otro, y hubiera dado el mismo resultado.

Segun lo que precede se ve que si se tienen dos proyecciones de un cuerpo determinado por superficies planas, por aristas rectilíneas y por vértices de ángulos sólidos, proyecciones que se reducen á los sistemas de las aristas rectilíneas, será fácil determinar la longitud de qualquiera de sus dimensiones; pues ó esta dimension será paralela á uno de los planos de proyeccion, ó será al mismo tiempo obliqua á los dos; en el primer caso la longitud pedida de la dimension será igual á su proyeccion; en el segundo se la deducirá de sus dos proyecciones por el método que acabamos de describir.

10 Este sería el lugar de indicar el modo cómo se construyen las proyecciones de los sólidos terminados por planos y aristas rectilíneas; pero no hay para esta operacion ninguna regla general: se echa de ver en efecto, que segun los supuestos que determinen la posicion de los cúspides de los ángulos de un sólido, la construccion de sus proyecciones puede ser mas ó menos fácil, y que la naturaleza de la operacion debe depender de la natural eza

de estos supuestos. Sucede en esto lo mismo que en el álgebra, en la qual no hay ningun método general para poner un problema en equacion. En cada caso particular la marcha depende del modo con que se expresan las relaciones entre las cantidades dadas y las desconocidas; y no es sino por medio de exemplos variados que los principiantes pueden acostumbrarse á entender bien estas relaciones, y á saber ponerlas en equacion. Lo mismo sucede en la geometría descriptiva. Por medio de un gran número de exemplos, y por el uso de la regla y del compas, adquirirémos el hábito de las construcciones, y nos acostumbrarémos á la eleccion de los métodos mas simples y mas elegantes para cada caso particular. Pero así como en la análisis, quando un problema está puesto en equacion, hay métodos para tratar estas equaciones y para deducir el valor de cada incógnita; del mismo modo tambien en la geometría descriptiva, quando estan construidas las proyecciones, hay métodos generales para construir todo lo que resulta de la forma y de la posicion respectiva de los cuerpos.

No es sin objeto la comparacion que hacemos en este lugar de la geometría descriptiva con el álgebra; estas dos ciencias tienen relaciones muy íntimas. No hay ninguna construccion de geometría descriptiva que no pueda traducirse en análisis; y quando las qüestiones no encierran mas de tres incógnitas, cada operacion analítica puede mirarse como la representacion de una figura de geometría.

Seria de desear que estas dos ciencias fuesen cultivadas á un mismo tiempo: la geometría descriptiva presentaria en las operaciones analíticas las mas complicadas la evidencia que la caracteriza, y al mismo tiempo la análisis prestaria á la geometría la generalidad que le es propia.

11 El convenio que sirve de base al método de las proyecciones es adequado para representar la posicion de un punto en el espacio, ó la de una línea recta indefinida ó terminada, y por consiguiente para representar tambien la forma y la posicion de un cuerpo terminado por superficies planas, por aristas rectilíneas y por las cúspides de ángulos sólidos, porque en este caso el cuerpo es enteramente conocido, quando se conoce la posicion de todas sus aristas y la de las cúspides de todos sus ángulos. Pero si el cuerpo estuviese terminado, ya sea por una sola superficie curva, y cuyos puntos estuviesen todos sujetos á una misma ley, como en el caso de la esfera, ó bien por la reunion discontínua de muchas partes de superficies curvas diferentes, como en

el caso de un cuerpo torneado; este convenio no solo seria incómodo, impracticable, y no tendria la ventaja de presentar una imágen, sino que no seria fecundo ni suficiente.

Primeramente es fácil de ver que el convenio que hemos hecho seria incómodo y aun impracticable si fuese solo; pues para expresar la posicion de todos los puntos de una superficie curva seria necesario no solo que cada uno de ellos fuese indicado por su proyeccion horizontal y por su proyeccion vertical, sino que aun las dos proyecciones de un mismo punto estuviesen ligadas entre sí, á fin de no exponerse á combinar la proyeccion horizontal de un cierto punto con la proyeccion vertical de otro; y siendo el modo mas simple de ligar entre sí estas dos proyecciones, unirlas por una misma recta perpendicular á la línea de interseccion de los dos planos de proyeccion, se recargarian los diseños de un número prodigioso de líneas, que causarian una confusion tanto mayor quanto mas se quisiese aproxîmar á la exâctitud. Luego harémos ver que este método seria insuficiente, y que no tendria la fecundidad necesaria.

Entre el número infinito de superficies curvas diferentes exîsten algunas que no se extienden sino en una parte finita y circunscripta del espacio, y cuyas proyecciones tienen una extension limitada en todas las direcciones; la de la esfera, por exemplo, se halla en este caso. La extension de su proyeccion sobre un plano se reduce á la de un círculo del mismo radio que la esfera; y se puede concebir que el plano sobre el qual se debe hacer la proyeccion tenga dimensiones bastante grandes para contenerla. Pero todas las superficies cilíndricas son indefinidas en cierta direccion, como la recta que les sirve de generatriz. El plano mismo, que es la mas simple de las superficies, es indefinido en dos sentidos. En fin, hay un gran número de superficies, de las quales muchos de sus lados se extienden á un mismo tiempo en el espacio en todas direcciones. Pero los planos sobre los quales se practican las proyecciones tienen necesariamente una extension limitada. Luego si no hubiese otro medio de hacer conocer la naturaleza de una superficie curva que las dos proyecciones de cada uno de los puntos por donde pasa, este medio, no seria aplicable sino á los puntos de la superficie que correspondiesen á la extension de los planos de proyeccion; los que estuviesen mas allá no podrian ser representados ni conocidos: así el método seria insuficiente. En fin, no seria fecundo, porque no podria deducirse nada relativamente á los planos tangentes de la superficie, á sus normales, á sus dos curvaturas en cada punto, á sus líneas de inflexîon, á sus aristas de retroceso, á sus líneas múltiplas, á sus puntos múltiplos, en fin, á todas las afecciones que deben considerarse quando se quiere obrar sobre una superficie curva.

Ha sido por consiguiente necesario recurrir á un nuevo convenio, que fuese compatible con el primero, y que pudiese suplirle siempre que no fuese suficiente. Este nuevo convenio es el que vamos á exponer.

12 No hay ninguna superficie curva que no pueda ser considerada como engendrada por el movimiento de una línea curva, ya sea de forma constante quando muda de posicion, ya variable al mismo tiempo de forma y de posicion en el espacio. Pudiendo esta proposicion ser difícil de comprehender por causa de su generalidad, vamos á explicarla por medio de algunos exemplos, con los quales estamos ya familiarizados.

Las superficies cilíndricas pueden ser engendradas de dos modos principales, ó por el movimiento de una línea recta, que permanece siempre paralela á una recta dada durante su movimiento, apoyándose siempre en una curva dada, ó por el movimiento de la curva que servia de conductriz en el primer caso, y que se mueve de modo que, apoyándose siempre uno de sus puntos sobre la recta dada, todos los demas describen líneas paralelas á esta recta. En la una y en la otra de estas generaciones la generatriz, que es una línea recta en el primer caso y una curva qualquiera en el segundo, no muda de forma, y solo muda de posicion en el espacio.

Las superficies cónicas tienen igualmente dos generaciones principales.

Se las puede considerar primeramente como engendradas por una recta indefinida, que estando sujeta á pasar siempre por un punto dado, se mueve de modo que se apoya constantemente sobre una curva dada que la dirige en su movimiento. El punto único por el qual pasa siempre la recta es el centro de la superficie, que impropiamente se le ha llamado cúspide. En esta generacion la línea generatriz es aun de forma constante, pues no cesa de ser una línea recta.

Tambien se pueden engendrar las superficies cónicas de otro modo, que, para mayor sencillez, no aplicarémos sino al caso en que tengan bases circulares. Estas superficies pueden considerarse como engendradas por la circunferencia de un círculo, que se mueve de modo, que, permaneciendo siempre su plano paralelo á sí mismo, y hallándose su centro siempre en la línea dirigida al cúspide, su radio sea en cada instante del movimiento proporcional á la distancia de su centro al cúspide. Se ve que si el plano del círculo tiende á acercarse al cúspide en su movimiento, su radio disminuye para ser nulo quando el plano pase por el cúspide, y este mismo radio muda de sentido para crecer despues de un modo indefinido quando el plano, despues de haber pasado por el cúspide, se aleja de él mas y mas. En esta segunda generacion, no solo la circunferencia del círculo, que es la curva generatriz, muda de posicion, sino que varía tambien de forma en cada instante de su movimiento, pues muda de radio, y por consiguiente de curvatura y de extension.

Una superficie de revolucion puede ser engendrada por el movimiento de una curva plana, que gira al rededor de una línea recta colocada de un modo qualquiera en su plano. En este modo de considerarla su curva generatriz es de forma constante, y solo muda de posicion. Pero tambien se la puede considerar como engendrada por la circunferencia de un círculo, que se mueve de modo que, estando siempre su centro sobre el exe, y su plano manteniéndose constantemente perpendicular á este exe, su radio sea en cada instante igual á la distancia que hay entre el punto en que el plano del círculo corta el exe, y á aquel en que corta una curva qualquiera dada en el espacio. Entonces la curva generatriz muda al mismo tiempo de forma y de posicion.

Estos tres exemplos deben bastar para hacer comprehender que todas las superficies curvas pueden ser engendradas por el movimiento de ciertas líneas curvas, y que no hay ninguna cuya forma y posicion no puedan ser enteramente determinadas siempre que se conozca exâcta y completamente su generacion. Esta nueva consideracion es la que forma el complemento del método de las proyecciones. En adelante tendrémos á menudo ocasion de asegurarnos de su sencillez y de su fecundidad.

Por consiguiente no es dando las proyecciones de algunos puntos particulares por los quales pasa una superficie curva, que se determina su forma y su posicion, sino haciendo de modo que para un punto qualquiera se pueda construir la curva generatriz, segun la forma y la posicion que deba tener al pasar por este punto. Sobre lo qual es menester observar: 1º que cada superficie curva, pudiendo ser engendrada de una infinidad de modos diferentes, depende de la destreza y de la sagacidad del que obra el elegir, entre todas las generaciones posibles, aquella que emplea la curva, la mas simple, y que exîge consideraciones menos penosas: 2º que la experiencia ha enseñado, que en lugar de no considerar para cada superficie curva sino una sola de sus generaciones, lo que exîgiria el estudio de la ley del movimiento y la de la mutacion de forma de su generacion, es mas simple por lo comun considerar al mismo tiempo dos generaciones diferentes, é indicar para cada punto la construccion de las dos curvas generatrices.

Así en la geometría descriptiva, para expresar la forma y la posicion de una superficie curva, basta dar para un punto qualquiera de esta superficie, y del qual una de las proyecciones puede tomarse á voluntad, el modo de construir las proyecciones horizontales y verticales de dos generatrices diferentes que pasan por este punto.

13 Apliquemos ahora estas consideraciones generales al plano, que entre todas las superficies es la mas simple, y la que se emplea con mas freqüencia.

El plano se engendra por una primera recta dada de posicion, y que se mueve de modo que todos sus puntos describen rectas paralelas á una segunda recta dada. Si la segunda recta se halla en el plano que se considera, se puede tambien decir que el plano es engendrado por la segunda recta, que se mueve de modo que todos sus puntos describen líneas rectas paralelas á la primera.

Por consiguiente se tiene la idea de la posicion de un plano por la consideracion de dos líneas rectas, de las quales cada una puede considerarse como su generatriz La posicion de estas dos rectas, en el plano que ellas pueden engendrar, es absolutamente indiferente: no se trata pues, en el método de las proyecciones, sino de elegir las que piden construcciones mas simples. Esta es la razon por qué en la geometría descriptiva se indica la posicion de un plano dando las dos rectas segun las quales corta los planos de proyeccion. Es fácil de reconocer que estas dos rectas deben encontrar en un mismo punto la interseccion de los dos planos de proyeccion, y que por consiguiente este punto es aquel en el que ellas mismas se encuentran.

Como tenemos que considerar planos con mucha freqüencia, para abreviar el lenguage llamarémos *trazas* á las rectas, segun las quales cada uno de ellos corta los planos de proyeccion, y que servirán para indicar su posicion.

14 Sentados estos principios, pasemos á la solucion de varias qüestiones, que servirán á un mismo tiempo no solo para exercitarnos en el método de las proyecciones, sino para facilitarnos los medios de hacer despues nuevos progresos en la geometría descriptiva.

Fig. 4. Primera qüestion. Dado un punto cuyas proyecciones sean D y *d*, y una recta cuyas proyecciones sean AB, *ab*; construir las proyecciones de una segunda recta, que pase por el punto dado, y sea paralela á la primera.

Solucion. Las dos proyecciones horizontales de la recta dada y de la recta que se busca deben ser paralelas entre sí; pues son las intersecciones de dos planos verticales paralelos con un mismo plano. Lo mismo sucede respecto á las proyecciones verticales de las mismas rectas. Ademas, como la recta que se pide debe pasar por el punto dado, sus proyecciones deben pasar respectivamente por las del mismo punto. Luego si por el punto D se tira EF paralela á AB, y por el punto *d* la línea *ef* paralela á *ab*, las rectas EF y *ef* serán las proyecciones pedidas.

15 *Fig. 5. Segunda qüestion.* Dado un plano cuyas trazas sean AB, BC, y un punto cuyas proyecciones sean G, *g*; construir las trazas de un segundo plano, que pase por el punto dado, y sea paralelo al primero.

Solucion. Las trazas del plano pedido deben ser paralelas á las trazas respectivas del plano dado, puesto que estas trazas, consideradas de dos en dos, son las intersecciones de dos planos paralelos con un mismo plano. Por consiguiente no falta mas que hallar, para cada una de ellas, un solo punto, por el qual deba pasar. Para esto, por el punto dado, concibamos una recta horizontal, que se halle en el plano que se busca: esta recta será paralela á la traza AB, y cortará el plano vertical en un punto, que será uno de los de la traza del plano que se busca sobre el vertical; y se tendrán sus dos proyecciones tirando por el punto *g*, la horizontal indefinida *g*F, y por el punto G la recta GI, paralela á AB. Si se prolonga GI hasta que encuentre la interseccion LM de los dos planos de proyeccion en un punto I, este punto será la proyeccion horizontal de la interseccion de la recta horizontal con el plano vertical. Luego este punto de interseccion se hallará sobre la vertical IF tirada por el punto I. Pero debe hallarse tambien sobre *g*F: luego se hallará en el punto F de interseccion de estas dos últimas rectas. En fin, si por el punto F se tira una paralela á BC, esta línea será la traza del plano que se busca sobre el plano vertical; y si despues de haber prolongado esta traza hasta que encuentre LM en el punto E se tira DE paralela á AB, se tendrá la traza del mismo plano sobre el plano horizontal.

En lugar de concebir sobre el plano que se busca una recta horizontal, se hubiera podido concebir una paralela al plano vertical; lo que, por un raciocinio absolutamente semejante, hubiera dado la construccion siguiente.

Por el punto G, y paralelamente á LM, se tirará la recta indefinida GD; por el punto *g* se tirará *g*H paralela á CB, y se prolongará hasta que corte LM en un punto H, por el qual se tira HD perpendicular á LM: esta última cortará GD en un punto D, por el qual, si se tira una paralela á AB, se tendrá una de las trazas del plano que se pide; y si despues de haber prolongado esta traza hasta que encuentre LM en un punto E se tira EF paralela á BC, se tendrá la traza sobre el plano vertical.

16 *Fig. 6. Tercera qüestion.* Dado un plano cuyas dos trazas sean AB, BC, y un punto cuyas dos proyecciones sean D, *d*; construir: 1º las proyecciones de la recta baxada perpendicularmente del punto sobre el plano: 2º la del punto en que dicha perpendicular encuentra el plano.

Solucion. Las perpendiculares DG, *dg*, baxadas de los puntos D y *d*, sobre las trazas respectivas del plano, serán las proyecciones indefinidas de la recta que se pide; pues, si por la perpendicular se concibe un plano vertical, este plano cortará al plano horizontal y al plano dado en dos rectas, que serán la una y la otra perpendiculares á la comun seccion AB de estos dos planos: como la primera de estas rectas es la proyeccion del plano vertical, lo es tambien de la perpendicular que contiene: luego la proyeccion de esta perpendicular debe pasar por el punto D, y ser perpendicular á AB.

La misma demostracion tiene lugar para la proyeccion vertical.

En quanto al punto en que la perpendicular encuentra al plano dado es evidente que debe hallarse en la interseccion de este plano con el plano vertical que pasa por la perpendicular: interseccion que se halla proyectada indefinidamente sobre EF. Si se tuviera la proyeccion vertical *fe* de esta interseccion, contendria la del punto que se pide; y como este punto debe tambien hallarse proyectado sobre la recta *dg*, se hallaria en la interseccion *g* de las dos rectas *fe* y *dg*. Por consiguiente no falta sino hallar la línea *fe*; pero la interseccion del plano dado con el plano vertical que le es perpendicular, encuentra el plano horizontal en el punto E, luego se tendrá la proyeccion vertical *e*, baxando E*e* perpendicularmente sobre LM; y encuentra el plano vertical de proyeccion en un punto cuya proyeccion horizontal es la interseccion de la recta LM con DG, prolongada, si es menester, y cuya proyeccion vertical debe hallarse sobre la vertical

F*f* y sobre la traza CB; por consiguiente estará en el punto *f* de su interseccion.

Habiendo hallado la proyeccion vertical *g* del extremo de la perpendicular, es fácil construir su proyeccion horizontal; pues si se baxa sobre LM la perpendicular indefinida *g*G, esta recta contendrá el punto pedido; pero la recta DF debe tambien contenerlo: luego estará en el punto G de la interseccion de estas dos rectas.

17 *Fig. 7. Quarta qüestion.* Dada una recta cuyas dos proyecciones sean AB, *ab*, y un punto cuyas dos proyecciones sean D, *d*; construir las trazas del plano tirado por el punto dado perpendicularmente á la recta.

Solucion. Se sabe ya por el problema anterior que las dos trazas deben ser perpendiculares á las proyecciones respectivas de las dos rectas; falta hallar para cada una de ellas uno de los puntos por los quales debe pasar. Para esto, si se concibe por el punto dado, en el plano que se busca, una horizontal prolongada hasta que encuentre al plano vertical de proyeccion, se tendrá su proyeccion vertical tirando por el punto *d* una horizontal indefinida *d*G, y su proyeccion horizontal tirando por el punto D una perpendicular á AB, prolongada hasta que corte LM en un punto H, que será la proyeccion horizontal del punto en que toca la horizontal al plano vertical de proyeccion. Este punto de contacto, que debe hallarse en la vertical HG y en la horizontal *d*G, y por consiguiente en el punto G de interseccion de estas dos rectas, será por consiguiente uno de los puntos de la traza sobre el plano vertical: luego se tendrá esta traza tirando por el punto G la recta FC perpendicular á *ab*: luego, en fin, si por el punto C, en que la primera traza encuentra LM, se tira CE perpendicular á AB, se tendrá la segunda traza pedida.

Si se tratase de hallar el punto en donde la recta encuentra el plano, se haria exâctamente lo mismo que en la qüestion precedente.

En fin, si se quisiese baxar desde el punto dado una perpendicular á la recta, se construiria, como acabamos de decir, el punto en que la recta encuentra al plano tirado por el punto dado, y que le seria perpendicular; y se tendria para cada una de las dos proyecciones de la perpendicular pedida dos puntos por los quales debe pasar.

18 *Fig. 8. Quinta qüestion.* Dada la posicion de dos planos por medio de sus trazas AB y A*b* para el uno, CD y C*d* para el

otro; construir las proyecciones de la recta formada por la interseccion de dichos planos.

Solucion. Hallándose todos los puntos de la traza AB en el primero de los dos planos dados, y todos los de la traza CD en el segundo, el punto E de interseccion de estas dos trazas pertenece evidentemente á los dos planos; por consiguiente es uno de los puntos de la recta pedida. Se echará tambien de ver que el punto F de interseccion de las dos trazas sobre el plano vertical es aun otro punto de esta recta. Por consiguiente la interseccion de los dos planos está colocada de modo que encuentra el plano horizontal en E, y el plano vertical en F.

Luego si se proyecta el punto F sobre el plano horizontal, lo que se hará baxando sobre LM la perpendicular F*f*; y si se tira la recta *f*E, esta será la proyeccion horizontal de la interseccion de los dos planos. Igualmente si se proyecta el punto E sobre el plano vertical baxando sobre LM la perpendicular E*e*, y si se tira la recta *e*F, será la proyeccion vertical de la misma interseccion.

19 *Fig. 9. Sexta qüestion.* Dados dos planos por medio de las trazas AB, A*b* del primero, y CD, C*d* del segundo; construir el ángulo que dichos planos forman entre sí.

Solucion. Despues de haber construido como en la qüestion precedente la proyeccion horizontal E*f* de la interseccion de los dos planos; si se concibe un tercer plano que les sea perpendicular, y que por consiguiente lo sea tambien á su comun interseccion, este tercer plano cortará los dos planos dados en dos rectas, que formarán entre sí un ángulo igual al ángulo que se pide.

Ademas la traza horizontal de este tercer plano será perpendicular á la proyeccion E*f* de la interseccion de los dos planos dados, y formará con las otras dos rectas un triángulo, cuyo ángulo opuesto al lado horizontal será el ángulo pedido: no se trata pues mas que de construir este triángulo.

Como es indiferente el que el tercer plano pase por un punto qualquiera de la interseccion de los dos primeros, se puede tirar su traza sobre el plano horizontal á voluntad, con tal que sea perpendicular á E*f*. Tírese pues una línea recta qualquiera GH, perpendicular á E*f*, terminada en G y en H en las trazas de los dos planos dados, y que corte E*f* en el punto I; esta recta será la base del triángulo que es menester construir. Concibamos ahora que el plano de este triángulo gira al rededor de su base GH como charnela, para doblarse sobre el plano horizontal; en este movimiento, su vértice, que está al principio en la interseccion de los dos planos, no sale del plano vertical que pasa por esta interseccion, porque este plano vertical es perpendicular á GH; y quando el plano del triángulo está doblado, este vértice se halla sobre uno de los puntos de la recta E*f*. Así no queda mas que hallar que la altura del triángulo, ó el tamaño de la perpendicular baxada del punto I sobre la interseccion de los dos planos.

Esta perpendicular se halla contenida en el plano vertical que pasa por E*f*. Luego si se concibe que este plano gira al rededor de la vertical *f*F para aplicarse sobre el plano vertical de proyeccion, y si se lleva *f*E, de *f* á *e*, *f*I de *f* á *i*, la recta *e*F será el tamaño de la parte de la interseccion comprehendida entre los dos planos de proyeccion; y si del punto *i* se baxa sobre esta recta la perpendicular *ik*, esta será la altura del triángulo pedido.

Luego, finalmente, llevando *ik* de I á K, y acabando el triángulo GKH, el ángulo en K será igual al ángulo formado por los dos planos.

20 *Fig. 10. Séptima qüestion.* Dadas dos rectas que se cruzan en el espacio por sus proyecciones horizontales AB, AC, y por sus proyecciones verticales *ab*, *ac*; construir el ángulo que forman entre sí.

Antes de proceder á la solucion observarémos que, puesto que las dos rectas dadas se cortan por suposicion, el punto A donde se cortan sus proyecciones horizontales, y el punto *a* en que se cortan sus proyecciones verticales serán las proyecciones del punto en que ellas se cortan, y estarán por consiguiente en la misma recta *a*GA perpendicular á LM. Si los dos puntos A y *a* no estuvieran en una misma perpendicular á LM, las rectas dadas no se cortarian, y por consiguiente no estarian en un mismo plano.

Solucion. Se concebirán prolongadas las dos rectas dadas hasta que encuentren al plano horizontal, cada una en un punto, y se construirán estos dos puntos de contacto. Para esto se prolongarán las rectas *ab*, *ac*, hasta que corten LM en dos puntos *d*, *e*, que serán las proyecciones verticales de estos dos puntos de contacto; por los puntos *d*, *e* se tirarán en el plano horizontal, y perpendicularmente á LM, dos rectas indefinidas *d*D, *e*E, que debiendo pasar cada una por uno de estos puntos, determinarán sus posiciones por medio de las intersecciones D, E, con las proyecciones horizontales respectivas AB, AC, prolongadas si es menester.

Hecho esto, si se tira la recta DE, esta recta y las dos partes de las rectas dadas, comprehendidas entre su punto de interseccion y los puntos D, E, formarán un triángulo, cuyo ángulo, opuesto á DE, será el ángulo pedido; así solo se tratará de construir este triángulo. Para esto, despues de haber baxado del punto A sobre DE la perpendicular indefinida AF, si se concibe que el plano del triángulo gira al rededor de su base como charnela, hasta que se abata sobre el plano horizontal; el vértice de este triángulo no saldrá durante su movimiento del plano vertical tirado por AF, y vendrá á caer sobre alguno de los puntos de la prolongacion de FA en un punto H por exemplo, cuya distancia á la base DE será menester determinar.

La proyeccion horizontal de esta distancia es la recta AF, y la altura vertical de uno de sus extremos encima del otro es igual á *a*G: luego, en virtud de la fig. 3, si se lleva AF sobre LM de G á *f*, y si se tira la hipotenusa *af*, esta hipotenusa será la distancia que se busca. Luego, en fin, si se lleva *af* de F á H, y si por el punto H se tiran las rectas HD, HE, el triángulo quedará construido, y el ángulo DHE será el ángulo pedido.

21. *Octava qüestion.* Dadas las proyecciones de una recta, y las trazas de un plano; construir el ángulo que la recta y el plano forman entre sí.

Solucion. Si por un punto tomado sobre la recta dada se concibe una perpendicular al plano dado, el ángulo que esta perpendicular formará con la recta dada será el complemento del ángulo pedido, y bastará construir este ángulo para resolver el problema.

Si sobre las dos proyecciones de la recta se toman dos puntos que esten en la misma perpendicular á la interseccion comun de los dos planos de proyeccion, y si por estos dos puntos se tiran perpendiculares á las trazas respectivas del plano dado, se tendrán las proyecciones horizontal y vertical de la segunda recta. La qüestion se reduce por consiguiente á construir el ángulo formado por dos rectas que se cortan, y por consiguiente está comprehendida en el problema anterior.

22. Quando se quiere levantar el plano de un pais, se concibe ordinariamente que los puntos principales estan ligados entre sí por medio de líneas rectas que forman triángulos, y se trata luego de trasladar estos triángulos sobre el plano por medio de una escala mas pequeña, y de colocarlos entre sí en el mismo órden que guardan los que representan. Las operaciones que es menester hacer sobre el terreno consisten principalmente en la medida de los ángulos de estos triángulos; y para que estos ángu-

los puedan trasladarse directamente sobre el plano, deben hallarse cada uno de ellos sobre un plano paralelo al de la carta. Si el plano del ángulo es obliquo al horizonte, ya no es este mismo el ángulo que debe trazarse, sino su proyeccion horizontal; y siempre se puede determinar esta proyeccion, con tal que despues de haber medido el ángulo se midan tambien los que sus lados forman con el horizonte; lo que da lugar á la operacion que sigue conocida baxo el nombre de reduccion de un ángulo al horizonte.

Novena qüestion. Dados el ángulo formado por dos rectas, y los que forman con el plano horizontal; construir la proyeccion horizontal del primero de estos ángulos.

Fig. 11. *Solucion.* Sea A la proyeccion horizontal del vértice del ángulo que se pide, y AB la de uno de sus lados, de modo que sea menester trazar el otro lado AE. Se supondrá que el plano vertical de proyeccion pasa por AB; y habiendo tirado por el punto A una vertical indefinida A*a*, se tomará sobre ella, á voluntad, un punto *d*, que se mirará como la proyeccion vertical del vértice del ángulo observado. Hecho esto, si por el punto *d* se tira la recta *d*B, que haga con la horizontal, un ángulo *d*BA igual al que el primer lado hace con el horizonte, el punto B será aquel en que este lado toca el plano horizontal. Igualmente, si se tira por el punto *d* la recta *d*C, que haga con la horizontal un ángulo *d*CA igual al que el segundo lado forma con el horizonte, y si del punto A como centro, con el radio AC, se describe un círculo indefinido CEF, el segundo lado no podrá encontrar al plano horizontal sino en uno de los puntos del arco CEF. Solo faltará hallar la distancia de este punto á algun otro conocido, como por exemplo á B.

Esta última distancia se halla en el plano del ángulo observado. Luego si se tira la recta *d*D, de modo que el ángulo D*d*B sea igual al ángulo observado, y si se traslada *d*C, de *d* á D, la recta DB será igual á esta distancia.

Luego si del punto B como centro, y con un intervalo igual á BD, se describe un arco de círculo, el punto E en que cortará el primero será aquel en que el segundo lado encontrará el plano horizontal: luego la recta AE será la proyeccion horizontal de este lado, y el ángulo BAE la del ángulo observado.

Las nueve qüestiones que preceden apenas bastan para dar una idea del método de las proyecciones, y no pueden manifestar todos sus recursos. Pero á medida que vayamos elevándonos á consideraciones mas generales, tendrémos cuidado de hacer las operaciones que mas convengan para este objeto.

II.

De los planos tangentes y de las normales de las superficies curvas.

23 Como no hay ninguna superficie curva que no pueda ser engendrada de varios modos por el movimiento de líneas curvas, si por un punto qualquiera de una superficie se consideran dos generatrices diferentes en la posicion que ellas deben tener, quando la una y la otra pasen por este punto, y si se conciben las tangentes en este punto á cada una de las generatrices, el plano que pase por estas dos tangentes es el *plano tangente*. El punto de la superficie en que se cortan estas dos generatrices, y que pertenece al mismo tiempo á las dos tangentes y al plano tangente, es el punto de contacto de la superficie y del plano.

La recta que pasa por el punto de contacto perpendicularmente al plano tangente se llama *normal* de la superficie. Es perpendicular al elemento de la superficie, porque la direccion de este elemento coincide en todos sentidos con la del plano tangente que puede mirarse como su prolongacion.

24 La consideracion de los planos tangentes y de las normales á las superficies curvas es muy útil á un gran número de artes; y para muchos de ellos es absolutamente indispensable. No ofrecerémos aquí sino un solo exemplo de estos dos casos, y los tomarémos de la arquitectura y de la pintura.

Las diferentes partes de que se componen las bóvedas de cantería se llaman *dovelas*; y las superficies de contacto de dos dovelas se nombran *lechos* ó *juntas*; sea que estas dovelas pertenezcan á una misma hilada, ó á hiladas diferentes y consecutivas.

La posicion de las juntas en las bóvedas está sujeta á varias condiciones á que es indispensable satisfacer. Durante el curso harémos conocer sucesivamente todas estas condiciones; pero por ahora solo considerarémos la que tiene relacion con nuestro objeto.

Una de las condiciones á que la posicion de las juntas debe satisfacer es la de ser perpendiculares entre sí, y perpendiculares á la superficie de la bóveda. Apartándose sensiblemente de esta ley, no solo se faltaria á los principios adoptados generalmente, sin los quales nada puede tener hermosura, sino que aun se expondria á hacer la bóveda menos sólida y menos durable; pues si una de las juntas fuese obliqua á la superficie de la bóveda, de las dos dovelas contiguas á esta junta la una tendria un ángulo obtuso, y la otra un ángulo agudo, y en la reaccion con que las dos dovelas actúan la una contra la otra, estos dos ángulos no podrian oponer la misma resistencia: el ángulo agudo, á causa de la fragilidad de los materiales, estaria expuesto á hendirse; lo qual alteraria la forma de la bóveda, y comprometeria la duracion del edificio. Por consiguiente la descomposicion de una bóveda en dovelas exîge indispensablemente la consideracion de los planos tangentes y de las normales á la superficie curva de la bóveda.

25 Pasemos á otro exemplo tomado en un género, que á primera vista no parece susceptible de tanta exâctitud.

Se considera generalmente la pintura como compuesta de dos partes distintas. La una es el arte propiamente dicho, cuyo objeto es el de excitar en el expectador una emocion determinada, de producir en él una sensacion dada, ó de ponerlo en la situacion que mejor le disponga á recibir cierta impresion; supone en el artista un grande uso de la filosofía; exîge de su parte los conocimientos mas exâctos sobre la naturaleza de las cosas, sobre el modo con que ellas actúan sobre nosotros, y aun sobre los signos involuntarios, por los quales se manifiesta esta accion: este debe ser el resultado de una educacion muy ilustrada, que nadie recibe, y que estamos muy distantes de dar á nuestros jóvenes artistas; no está sujeta á ninguna regla general, y solo es susceptible de consejos.

La otra parte de la pintura es propiamente hablando el oficio ó parte mecánica: tiene por objeto la exâcta execucion de las concepciones de la primera. En ella nada es arbitrario; todo puede ser previsto por un raciocinio riguroso, porque todo es el resultado preciso de objetos en que se ha convenido y de circunstancias dadas. Quando la forma y la posicion de un objeto estan determinadas, quando se conoce la naturaleza, el número y la posicion de todos los cuerpos que pueden iluminarlo, sea por medio de una luz directa, sea por radios reflexos; quando está determinada la posicion del ojo del observador; en fin, quando estan establecidas y bien conocidas todas las circunstancias que pueden influir en la vision, se halla absolutamente determinado el grado de color de cada uno de los puntos de la superficie visible del objeto. Todo quanto tiene alguna relacion con esto y con su brillo depende de la posicion del plano tangente á este punto respecto de los cuerpos que iluminan y de la del ojo del expectador; puede hallarse por solo el raciocinio, y quando está determinada de este modo debe aplicarse con exâctitud. Qualquiera diminucion de tono, qualquier aumento mudaria las apariencias, alteraria las formas, y produciria un efecto distinto del que se propuso el artista.

Sé muy bien que la rapidez de la execucion, que comunmente es necesaria, no permitiria sino raramente el emplear un método que privaria al entendimiento de todo auxîlio material, y lo abandonaria al exercicio único de sus facultades, y que es mucho mas fácil al pintor poner los objetos, observar sus grados de color, é imitarlos; pero si estuviese acostumbrado á considerar las posiciones de los planos tangentes y las dos curvaturas de las superficies en cada uno de sus puntos, curvaturas que serán el objeto de las lecciones siguientes, sacaria de este medio material un partido mas ventajoso, se hallaria en estado de restablecer los efectos que debian exîstir, y que faltan por la omision de algunas circunstancias, y de suprimir los que han producido algunas causas extrañas.

En fin, las expresiones vagas que á cada instante emplean los pintores, como la de *hace bien*, son un testimonio constante de la necesidad que tienen de conocimientos mas exâctos, y de raciocinios mas rigurosos.

26 Ademas de la utilidad que tiene en las artes la consideracion de los planos tangentes y de las normales á las superficies curvas, es uno de los medios mas fecundos que emplea la geometría descriptiva para la resolucion de las qüestiones, que seria muy difícil el resolver por otros: darémos algunos exemplos.

27 El método general para determinar el plano tangente á una superficie curva consiste (23) en concebir por el punto de contacto las tangentes á dos curvas generatrices diferentes que pasarian por este punto, y en construir el plano que pasaria por estas dos rectas. En algunos casos particulares, para abreviar las construcciones, nos separarémos un poco de este método tomado al pie de la letra; pero siempre se hará una cosa equivalente.

En quanto á la construccion de la normal no nos ocuparémos de ello en particular, puesto que se reduce á la de una recta perpendicular al plano tangente, lo que sabemos hacer.

28 *Fig. 12. Primera qüestion.* Por un punto considerado sobre una superficie cilíndrica, y cuya proyeccion horizontal es dada, tirar un plano tangente á esta superficie.

Solucion. Sean AB, *ab*, las proyecciones horizontal y vertical de la recta dada, á la qual debe ser paralela la generatriz de la superficie cilíndrica; sea EPD la curva dada en el plano horizontal, sobre la qual debe apoyarse constantemente la generatriz, y que puede mirarse como la traza de la superficie cilíndrica; en fin, sea C la proyeccion horizontal dada del punto considerado sobre la superficie cilíndrica, y por el qual debe tirarse el plano tangente.

Sentado esto, por el punto considerado sobre la superficie, y cuya proyeccion horizontal es C, concibamos la recta generatriz en la posicion que debe hallarse quando pasa por este punto: esta generatriz, siendo una línca recta, será ella misma su propia tangente; por consiguiente tambien será una de las dos rectas que determinan la posicion del plano tangente; ademas, será paralela á la recta dada: sus dos proyecciones serán respectivamente paralelas á AB y *ab*: luego, si por el punto C se tira una recta EF indefinida y paralela á AB, se tendrá la proyeccion de la generatriz. Para tener su proyeccion vertical concibamos la generatriz prolongada sobre la superficie del cilindro hasta que encuentre al plano horizontal; lo que no puede suceder sino en uno de los puntos comunes á EF y á la curva EDP; por consiguiente será la interseccion de estas dos líneas; así se determinará este punto prolongando EF hasta que corte la curva EPD.

Aquí se presentan dos casos: ó la recta EF no cortará la traza del cilindro sino en un solo punto, ó le cortará en varios. Vamos á exâminar estos dos casos separadamente; y supondrémos primero que no puede cortarla sino en un solo punto D.

Siendo el punto D uno de los de la traza de la generatriz, si se le proyecta sobre el plano vertical por medio de la perpendicular D*d*, y si por el punto *d* se tira *df* paralela á *ab*, se tendrá la proyeccion vertical de la generatriz. Así se tendrán las dos proyecciones de una de las rectas por las quales debe pasar el plano tangente. Ademas, la proyeccion vertical del punto de contacto debe hallarse sobre la recta C*c'* tirada del punto dado C perpendicularmente á LM; tambien debe hallarse sobre *df*: luego estará en *c* interseccion de estas dos líneas.

Si la recta EF corta la traza EPD de la superficie cilíndrica en muchos puntos D, E, se hará para cada uno de ellos lo mismo que hemos executado con el punto D, mirado como si fuese el único; resultará solamente que se tendrán las proyecciones verticales *df*, *ef'* de otras tantas rectas generatrices, y las proyecciones verticales *c*, *c'* de otros tantos puntos de contacto como puntos de interseccion haya entre la recta EF y la traza EPD.

En el caso de la fig. 12 la traza de la superficie cilíndrica es una circunferencia de círculo, cuya propiedad es de poder ser cortada en dos puntos por una recta: así la vertical levantada por el punto dado C debe encontrar dos veces la superficie, primero en un punto cuya proyeccion vertical es c, por el qual pasa la generatriz quando se apoya en D, y despues en un segundo punto cuya proyeccion vertical es c', y por el qual pasa la generatriz quando se apoya sobre el punto E de la traza. Aunque estos dos puntos tengan la misma proyeccion horizontal, son muy distintos, y á cada uno de ellos debe corresponder un plano tangente particular. Ahora es menester hallar para cada uno de los dos puntos de contacto la segunda recta que debe determinar la posicion del plano tangente. Si se siguiese estrictamente el método general, mirando la traza como una segunda generatriz, seria menester concebirla pasando sucesivamente por cada uno de los puntos de contacto, y construir en cada uno de estos puntos una tangente; pero en el caso particular de las superficies cilíndricas se puede emplear una consideracion mas simple. En efecto, el plano tangente al punto C, c, toca la superficie en toda la extension de la línea generatriz que pasa por este punto; por consiguiente la toca en D, que es uno de los puntos de esta generatriz, y debe pasar por la tangente á la traza en el punto D. Por un raciocinio semejante se hallará que el plano tangente á C, c', debe pasar por la tangente á la traza en E. Luego si por los dos puntos D, E se tiran dos tangentes DK, EG á la traza, prolongadas hasta que corten la recta LM en dos puntos K, G, se tendrá sobre el plano horizontal las trazas de los dos planos tangentes.

Solo queda el hallar las trazas de estos planos sobre el plano vertical; y como ya tenemos para la una de estas trazas el punto K, y para la otra el punto G, solo nos queda que determinar un solo punto para cada una de ellas.

Para esto, ocupándonos del primero de los dos planos tangentes, concebirémos que el punto que se trata de construir es aquel en que encontraria el plano vertical una recta horizontal que pasase por el punto de contacto, y que se hallase en el plano tangente, se tendrá la proyeccion horizontal de esta recta, tirando por el punto C una paralela á la traza DK, que se prolongará hasta que encuentre la recta LM en un punto I; y se tendrá su proyeccion vertical tirando por el punto c una horizontal indefinida. El punto en que la horizontal encuentra el plano vertical debe hallarse al mismo tiempo sobre la vertical Ii, y sobre la horizontal ci; por consiguiente es el punto i de su interseccion: luego si por los puntos i y K se tira una recta, se tendrá la traza del primer plano tangente sobre el plano vertical. Se hallará del mismo modo la traza del segundo plano tangente sobre el plano vertical, tirando por el punto C una recta CH paralela á la traza horizontal EG, y se prolongará hasta que encuentre LM en H, se levantará la perpendicular H*h*; por el punto *c′* se tirará una horizontal, que cortará la vertical H*l* en un punto *h*, por el qual y por el punto G se tirará la recta G*h*, y se tendrá la traza que se busca.

29 *Fig. 13. Segunda qüestion.* Tirar un plano tangente á una superficie cónica, por un punto considerado sobre dicha superficie, y cuya proyeccion horizontal es dada.

La solucion de esta qüestion no difiere de la precedente sino en que la recta generatriz, en lugar de ser siempre paralela á sí misma, pasa siempre por el vértice, cuyas dos proyecciones son dadas. No creemos conveniente el darla; pero sí aconsejamos al lector la busque por sí mismo, ofreciéndole solamente el socorro de la fig. 13, si por ventura esto fuese necesario.

30 *Tercera qüestion.* Tirar un plano tangente á una superficie de revolucion al rededor de un exe vertical, por un punto considerado sobre esta superficie, y cuya proyeccion horizontal es dada.

Fig. 14. Solucion. Sea A la proyeccion horizontal dada del exe, *aa′* su proyeccion vertical, BCDEF la curva generatriz dada, considerada en un plano que pasa por el exe, y G la proyeccion horizontal dada del punto de contacto.

Sentado esto, si por el punto de contacto y por el exe se concibe un plano vertical, cuya proyeccion será la horizontal indefinida AG, este plano cortará la superficie de revolucion en una curva, que será la generatriz que pasa por el punto de contacto; si por el punto G se concibe una vertical, encontrará la generatriz, y por consiguiente la superficie en uno ó en muchos puntos, que serán otros tantos puntos de contacto, cuya proyeccion horizontal comun será G. Se hallarán todos estos puntos de contacto considerados en el plano de la generatriz, llevando AG sobre LM de *a* á *e*, y tirando por *e* una paralela á *aa′*; todos los puntos E, C, en los quales esta recta cortará la curva BCDEF, serán las intersecciones de la curva generatriz con la vertical que pasa por el punto G, é indicarán las alturas de otros tantos puntos de contacto sobre el plano horizontal. Para tener las proyecciones verticales de estos puntos de contacto se tirará por todos los puntos E, C, horizontales indefinidas, en que deben hallarse dichas proyecciones; y como tambien deben hallarse sobre la perpendicular á LM, tirada por el punto G; se sigue que las intersecciones *g, g′* de esta recta con las horizontales serán las proyecciones de los diferentes puntos de contacto.

Ahora, si por cada punto de contacto se concibe una seccion hecha por un plano horizontal, esta seccion, que podrá mirarse como una segunda generatriz, será la circunferencia de un círculo, cuyo centro estará en el exe, y cuya tangente, que debe ser perpendicular al extremo del radio, será tambien perpendicular al plano vertical tirado por AG, y en el qual se halla el radio: luego el plano tangente, que debe pasar por esta tangente, será tambien perpendicular á este mismo plano vertical, y su traza sobre el plano horizontal será perpendicular á AG. Por consiguiente solo queda que determinar su distancia al punto A, para tener la traza de cada uno de los planos tangentes; pero, si por los puntos E, C se tiran las tangentes EI, CH á la primera generatriz prolongadas hasta que encuentren LM, en los puntos I, H, las rectas *a*I, *a*H serán iguales á aquellas distancias; luego si se llevan estas rectas de A á *i*, y de A á *h*; y si por los puntos *i* y *h* se tiran á AG las perpendiculares *i*Q, *h*P, prolongadas hasta que encuentren la recta LM, se tendrán sobre el plano horizontal las trazas de todos los planos tangentes.

Para hallar sobre el plano vertical las trazas de los mismos planos es menester concebir, por cada punto de contacto, y en el plano tangente correspondiente, una horizontal prolongada hasta el plano vertical de proyeccion; esta recta, que no es otra cosa que la tangente al círculo, determinará sobre este plano un punto que pertenecerá á la traza. Para todos los puntos de contacto estas rectas tienen la misma proyeccion horizontal, y es la recta GK, tirada por el punto G perpendicularmente á AG, y terminada en la recta LM. Luego si por el punto K se tira una perpendicular indefinida K*kk'* á LM, contendrá todos los puntos en que las horizontales encuentran al plano vertical de proyeccion. Pero estos puntos deben tambien hallarse sobre las horizontales respectivas tiradas por los puntos E, C: luego las intersecciones *k*, *k'* de estas horizontales con la vertical K*k* serán cada una un punto de la traza de uno de los planos tangentes. Así la recta Q*k* será la traza de uno de los planos tangentes sobre el plano vertical; la recta P*k'* será la traza del otro; y así de los otros si acaso fuesen en mayor número.

Nos limitarémos por ahora á los tres exemplos precedentes, porque ellos bastan para todas las superficies cuya generacion hemos determinado. Mas adelante tendrémos ocasion de considerar las generaciones de familias de superficies infinitamente mas numerosas; y á medida que se nos presenten, aplicarémos el mismo método á la determinacion de sus planos tangentes y de sus normales. Ahora vamos á proponer una qüestion, en cuya solucion se puede emplear de un modo útil la consideracion de un plano tangente.

31 *Fig. 15. Qüestion quarta.* Dadas dos rectas por sus proyecciones horizontales AB, CD, y por sus proyecciones verticales *ab*, *cd*; construir las proyecciones PN, *pn* de su mas corta distancia, esto es, de la recta que es al mismo tiempo perpendicular á la una y á la otra, y hallar el tamaño de esta distancia.

Solucion. Por la primera de las dos rectas dadas concibamos un plano paralelo á la segunda; lo que siempre es posible, puesto que si por un punto qualquiera de la primera se tira una recta paralela á la segunda, y si se concibe que esta tercera recta se mueva paralelamente á sí misma á lo largo de la primera, engendrará el plano de que se trata. Concibamos ademas una superficie cilíndrica, cuya base sea circular, que tenga por exe la segunda recta dada, y por radio la distancia que se pide, tocará á esta superficie el plano en una recta paralela al exe, y cortará la primera recta en un punto. Si por este punto se tira una perpendicular al plano, esta será la recta pedida; pues pasará de hecho por un punto de la primera recta dada, y le será perpendicular, puesto que será perpendicular á un plano que pasa por esta recta; ademas cortará la segunda perpendicularmente, puesto que será un radio del cilindro, del qual esta segunda recta es el exe.

No se trata pues mas que de construir sucesivamente todas las partes de esta solucion.

1º Para construir las trazas del plano tirado por la primera recta paralelamente á la segunda se buscará primeramente el punto A, en el qual esta primera recta encuentra al plano horizontal, y que será un punto de la traza horizontal: para esto, despues de haber prolongado la proyeccion vertical *ba* hasta que corte la línea LM en el punto *a*, se tirará *a*A perpendicular á LM, y su interseccion con la proyeccion horizontal AB determinará el punto A. Por el punto en que la primera recta corta el plano vertical, y cuyas proyecciones son B y *b*, se concebirá una recta paralela á la segunda recta dada, y se construirán las proyecciones de esta paralela tirando indefinidamente BE paralela á CD, y *be* paralela á *cd*. Se construirá igualmente el punto E en que esta paralela toca al plano horizontal, tirando *e*E perpendicular á LM; y el punto E será un segundo punto de la traza horizontal del plano. Luego si se tira la recta AE, prolongada hasta que corte en un punto F la recta LM, se tendrá la traza horizontal; y es evidente que si por los puntos F y *b* se tira una recta F*b*, se tendrá la traza sobre el plano vertical.

2.º Para construir la línea de contacto del plano con la superficie cilíndrica es menester de un punto qualquiera de la segunda recta, que es el exe del cilindro (por exemplo del punto C en que ella encuentra al plano horizontal) baxar una normal, esto es, una perpendicular sobre el plano tangente; y el extremo de esta normal será un punto de la línea de contacto. Para hallar este extremo, segun el método que ya hemos descrito (*fig. 6*), se construirán primero las proyecciones indefinidas de la normal, tirando por el punto C la recta HG perpendicular á la traza AE; y por el punto *c* la recta *c*K perpendicular á la traza F*b*: luego despues de haber prolongado HG hasta que encuentre AE en un punto G, y LM en un punto H, se proyectará el punto G en *g*, y el punto H en *h* sobre la traza F*b*; se tirará la recta *gh*, que por su interseccion con *c*K, determinará la proyeccion vertical *i* del extremo de la normal; y se tendrá sobre HG la proyeccion horizontal del mismo punto, baxando *i*I perpendicular á LM. Halladas las proyecciones *i* é I del extremo de la normal, si por el punto I se tira IN paralela á CD, é *in* paralela á *cd*, se tendrán las proyecciones de la recta de contacto del plano con la superficie del cilindro. En fin, los puntos N y *n*, en que sus proyecciones encontrarán las de la primera recta dada, serán las proyecciones del punto de esta recta, por el qual pasa la perpendicular comun pedida.

3.º Conociendo las proyecciones N, *n* de uno de los puntos de la perpendicular comun que se busca, para tener la de esta perpendicular bastará tirar por los puntos N y *n* las rectas NP y *np* perpendiculares á las trazas respectivas AE, F*b*; y las partes NP y *np* de estas perpendiculares, comprehendidas entre las proyecciones de las dos rectas dadas, serán las proyecciones de la mas corta distancia pedida.

4.º En fin, si se quiere conocer el tamaño de esta mas corta distancia, se la construirá por el proceder de la fig. 3.

La consideracion de una superficie cilíndrica tocada por un plano no era necesaria para la solucion de la qüestion precedente. Despues de haber imaginado un plano paralelo á las dos rectas dadas, se hubiera podido tirar por cada una de las rectas un plano perpendicular á este plano, y la interseccion de estos dos últimos planos hubiera sido la direccion de la mas corta distancia pedida. Nos contentarémos con enunciar este segundo método, aconsejando al lector de buscar la construccion para exercitarse.

32 En las diferentes qüestiones que hemos resuelto sobre los planos tangentes á las superficies curvas, hemos supuesto siempre que el punto por el qual debia tirarse el plano tangente estaba tomado sobre la superficie, y que era al mismo tiempo el punto de contacto: esta sola condicion bastaba para determinar la posicion del plano. Pero no sucede lo mismo quando el punto por el qual debe pasar el plano está tomado fuera de la superficie.

Para que la posicion de un plano sea determinada es menester que satisfaga á tres condiciones diferentes, que equivalgan cada una á la de pasar por un punto dado; pero en general, la propiedad de ser tangente á una superficie curva dada, quando el punto de contacto no está indicado, no equivale mas que á una de estas condiciones. Por consiguiente, si se ha de determinar la posicion del plano, por consideraciones de esta naturaleza, es menester al menos tres. En efecto, supongamos que nosotros tengamos tres superficies curvas dadas, y que un plano sea tangente á una de ellas en un punto qualquiera, podemos concebir que este plano se mueve al rededor de la superficie, sin dexar de tocarla: podrá hacerlo en todas direcciones; solamente el punto de contacto se moverá sobre la superficie á medida que el plano tangente mudará de posicion; y la direccion del movimiento del punto de contacto será la misma que la del movimiento del plano. Concibamos que este movimiento se haga en cierta direccion hasta que el plano encuentre la segunda superficie, y la toque en un cierto punto: entonces el plano será al mismo tiempo tangente á las dos primeras superficies, y su posicion aun no estaba determinada. Podemos en efecto concebir que el plano gira al rededor de estas dos superficies, sin cesar de tocarlas á la una y á la otra. Ya no podrá como antes moverse en todas direcciones; y no podrá hacerlo sino en una sola. A medida que el plano mude de posicion, los dos puntos de contacto se moverán cada uno sobre la superficie á que pertenecen, de modo que si se concibe una recta tirada por estos dos puntos, sus movimientos se harán en la misma direccion respecto á esta recta quando el plano toque las superficies del mismo lado; y se harán en direcciones contrarias, quando el plano toque las dos superficies, la una de un lado, la otra del otro. En fin, concibamos que este movimiento, que es el único que pueda aun tener lugar, continúa hasta que el plano toca la tercera superficie en un cierto punto: entonces la posicion del plano seria determinada, y no podria ya moverse sin dexar de ser tangente á una de las tres superficies.

Se ve pues que para determinar la posicion de un plano por medio de contactos indeterminados con superficies curvas dadas, son menester en general tres. Así, proponiéndose tirar un plano tangente á una superficie curva dada, esta condicion no equivaldría sino á una sola de las tres, á las quales puede satisfacer el plano: se podrian pues tomar otras dos á voluntad, y por exemplo, hacer pasar el plano por dos puntos dados, ó lo que es lo mismo por una recta dada. Si el plano debiese ser tangente al mismo tiempo á dos superficies, habria dos condiciones determinadas, no quedaria mas que una de quien disponer, y no se podria sujetar el plano mas que á pasar por un punto dado. En fin, si el plano debiese tocar al mismo tiempo á tres superficies dadas, no se podria disponer de ninguna otra condicion, y su posicion seria determinada.

Lo que acabamos de decir se refiere á las superficies curvas en general; no obstante es menester exceptuar lo que pertenece á todas las superficies cilíndricas, á todas las superficies cónicas, y á todas las superficies desarrollables; pues, en esta especie de superficies, el contacto con un plano no se reduce á un punto único; se extiende por toda una línea recta indefinida, que se confunde con la generatriz en una de sus posiciones. La propiedad que tendria un plano en tocar una sola de estas superficies equivaldria á dos condiciones, puesto que le obligaria á pasar por una recta; y no quedaria mas de una condicion de quien disponer, como por exemplo la de pasar por un punto dado. Por consiguiente no podria proponerse tirar un plano que fuese al mismo tiempo tangente á dos de estas superficies, y con mas razon á tres, á menos que no hubiese algunas circunstancias particulares que hiciesen compatibles estas condiciones.

33. Tal vez no será inútil, antes de pasar adelante, dar algunos exemplos de la necesidad en que puede uno hallarse de tirar planos tangentes á superficies curvas por puntos tomados fuera de ellas. Tomarémos el primero de estos exemplos en la construccion de las fortificaciones.

Quando se exponen los principios generales de fortificacion, se supone desde luego, que el terreno que está al alcance del cañon de la plaza fuerte, es horizontal en todas direcciones, y no presenta ninguna eminencia que pueda dar ventaja alguna al sitiador. Despues, baxo esta hipótesis, se determina la forma del cuerpo de la plaza, de las medias lunas, de los caminos cubiertos y de las obras avanzadas; y se indica como unas partes de la fortificacion deben dominar las otras, á fin de que todas contribuyan del modo mas eficaz á su defensa recíproca. Luego, para aplicar estos principios al caso en que el terreno que rodea la plaza presentase alguna altura de que pudiesen aprovecharse los sitiadores, y de la qual seria menester que la fortificacion fuese enfilada, no queda sino una nueva consideracion que hacer. Si no hay mas de una altura, se eligen en la plaza dos puntos, por los quales se concibe un plano tangente á la altura á qual se quiere dominar: este plano tangente se llama *plano de enfilamiento*; y se dan á todas las partes de la fortificacion la misma altura encima del plano de enfilamiento que la que hubieran tenido encima del plano horizontal, si el terreno hubiera estado á nivel: de este modo las unas dominan á las otras, y todas juntas dominan la altura próxîma del mismo modo que si el terreno fuese horizontal; y la fortificacion tiene las mismas ventajas que en el primer caso. En quanto á la eleccion de los dos puntos por los quales debe pasar el plano de enfilamiento, debe satisfacer á las dos condiciones siguientes: 1º que el ángulo formado por el plano con el horizonte sea el mas pequeño posible, á fin de que los terraplenes teniendo menos inclinacion, el servicio para la defensa encuentre menos dificultades: 2º que la altura de la fortificacion encima del terreno natural sea tambien el mas pequeño posible, á fin de que su construccion exîja menos trabajo y menos gasto.

Si en las inmediaciones de una plaza hay dos alturas, á las quales deba ser enfilada la fortificacion al mismo tiempo, el plano de enfilamiento debe ser tangente á las superficies de estas dos eminencias: no queda para fixar su posicion sino una sola condicion de que pueda disponerse, y de la que en efecto se dispone, de modo que se satisfaga del mejor modo posible á las condiciones indicadas en el primer caso.

34 El segundo exemplo que darémos será aun tomado de la pintura.

Las superficies de los cuerpos, sobre todo quando estan bruñidos, ofrecen puntos brillantes, cuyo resplandor puede compararse con el de los cuerpos luminosos que los iluminan. La vivacidad de estos puntos es tanto mas grande, y su extension tanto mas pequeña, quanto las superficies estan mas bruñidas. Quando las superficies son mates, los puntos brillantes resplandecen menos, y ocupan una parte mayor de la superficie.

Para cada superficie la posicion del punto brillante se halla determinada por la condicion siguiente: que el radio incidente de la luz, y el radio reflexo que se dirige al ojo del observador, esten en un mismo plano perpendicular al plano tangente de este punto, y hagan con este plano ángulos iguales, porque el punto brillante de la superficie hace veces de espejo, y envia al ojo una parte de la imágen del cuerpo luminoso. La determinacion de este punto exîge una extrema precision; y aun quando el diseño fuese lo mas correcto posible, y se hubiesen trazado sus contornos con una exâctitud matemática, el menor error cometido en la posicion del punto brillante los produciria muy grandes en la apariencia de las formas. No darémos mas que una prueba, pero muy concluyente.

La superficie del globo del ojo es tersa; ademas, está cubierta de una ligera capa de humedad, que hace su tersura mas perfecta: así quando se observa un ojo abierto, se ve sobre su superficie un punto brillante, muy resplandeciente, de muy pequeña extension, y cuya posicion depende de la del objeto que ilumina y de la del observador. Si la superficie del ojo fuese perfectamente esférica, el ojo podria girar al rededor de su exe vertical, sin que la posicion del punto brillante sufriese la menor alteracion; pero esta superficie es mas larga en el sentido del exe óptico; y quando gira al rededor del exe vertical, cambia la posicion del punto brillante. Habiéndonos hecho muy sensibles á esta mutacion un largo exercicio, nos sirve de mucho para juzgar la direccion del globo del ojo. Por la diferente posicion de los puntos brillantes sobre los globos de los dos ojos de una persona juzgamos principalmente si ella es bizca ó no, si nos mira ó no, en fin, hácia qué lado dirige la vista.

Exponiendo este exemplo, no pretendemos que en un quadro haya de determinarse geométricamente la posicion del punto brillante sobre el globo del ojo; nuestra intencion ha sido únicamente hacer ver quan grandes errores resultan en la forma aparente de los objetos, por pequeños que sean los que se cometan en la posicion del punto brillante, aunque el contorno aparente sea el mismo.

35 Pasemos ahora á la determinacion de los planos tangentes á las superficies curvas, tirados por puntos tomados fuera de ellas.

La superficie de la esfera es una de las mas simples que se puedan considerar; tiene generaciones comunes con un gran número de superficies diferentes: se podria, por exemplo, considerarla como superficie de revolucion, y no ocuparse de ella en particular. Pero su regularidad da lugar á resultados notables, entre los quales hay algunos interesantes por su novedad, y de los quales vamos á ocuparnos inmediatamente, menos por ellos mismos, que con el fin de adquirir, en la observacion de las tres dimensiones, un hábito de que necesitarémos para objetos mas generales y mas útiles.

36 *Primera qüestion.* Por una recta dada tirar un plano tangente á la superficie de una esfera dada.

Solucion. Primer método. Sean A y *a* (*fig.* 16) las dos proyecciones del centro de la esfera, BCD la proyeccion del círculo máxîmo horizontal, EF y *ef* las dos proyecciones indefinidas de la recta dada. Concíbase por el centro de la esfera un plano perpendicular á la recta, y constrúyanse las proyecciones G y *g* del punto en que la línea dada encuentra este plano, por el método que hemos dado (*fig.* 6).

Sentado esto, es evidente que por la recta dada se pueden tirar á la esfera dos planos tangentes, de los quales el primero la tocará de un lado, el segundo del otro, y ella se hallará colocada en medio de ellos; lo que determinará dos puntos diferentes de contacto, cuyas proyecciones se trata de construir.

Para esto si del centro de la esfera se concibe una perpendicular baxada sobre cada uno de los dos planos tangentes, cada una de ellas caerá sobre el punto de contacto de la superficie con el plano correspondiente; y ámbas estarán en el plano perpendicular á la recta dada: luego los dos puntos de contacto estarán en la seccion de la esfera por el plano perpendicular; cuya seccion será la circunferencia de uno de los círculos máxîmos de la esfera, y á la qual serán tangentes las dos secciones hechas en los planos tangentes por el mismo plano.

Si en el plano perpendicular, y por el centro de la esfera, se concibe una horizontal, cuya proyeccion vertical se tendrá trazando la horizontal *ah*, y la otra proyeccion baxando sobre EF la perpendicular AH; y si se concibe que el plano perpendicular gira al rededor de esta horizontal como charnela, hasta que él mismo sea horizontal; es evidente que su seccion con la superficie de la esfera vendrá á confundirse con la circunferencia BCD, que los dos puntos de contacto se hallarán sobre esta circunferencia, y que si se constituye el punto J sobre que viene á caer por este movimiento el punto en que la línea dada encuentra el plano perpendicular, las tangentes JC, JD tiradas al círculo determinarian estos dos puntos de contacto en la posicion en que se les considera ahora. Es fácil construir el punto J, ó lo que es lo mismo hallar su distancia al punto H; pues la proyeccion horizontal de esta distancia es GH, y la diferencia de las alturas verticales de sus extremos es gg': luego, si se lleva GH sobre la horizontal *ah*, de g' á *h*, la hipotenusa *hg* será el tamaño de esta distancia; por consiguiente, llevando gh sobre EF de H á J, y tirando las dos tangentes JC, JD, los dos puntos de contacto C, D estarán determinados en la posicion que han tomado quando el plano perpendicular se ha doblado sobre el plano horizontal.

Ahora, para determinar sus proyecciones en la posicion en que deben hallarse naturalmente, es menester concebir que el plano perpendicular vuelve á su posicion primitiva girando aun sobre la horizontal AH como charnela, y que lleva consigo el punto J, las dos tangentes JC, JD, prolongadas hasta que corten AH en dos puntos K, K′; y la cuerda CD, que cortará tambien la misma recta AH en un punto N. Es evidente que en este movimiento los puntos K, K′ y N, que estan sobre la charnela, permanecerán fixos, y que los dos puntos de contacto C, D describirán arcos de círculo, que estarán en planos perpendiculares á la charnela, y cuyas proyecciones horizontales se tendrán, baxando desde los puntos C, D, sobre AH, las perpendiculares indefinidas CP, DQ. Luego las proyecciones horizontales de los dos puntos se hallarán sobre las dos rectas CP, DQ. Pero en el movimiento retrógrado del plano perpendicular, las dos tangentes JCK′, JKD no se separan un instante de los dos puntos de contacto respectivos; y quando este plano ha vuelto á tomar su posicion primitiva, el punto J vuelve á hallarse otra vez proyectado en G, y las dos tangentes se proyectan segun las rectas GK′, GK. Luego estas dos últimas rectas deben tambien contener cada una la proyeccion horizontal de uno de los puntos de contacto; en fin, las intersecciones de estas dos rectas, con las rectas respectivas CP, DQ determinarán las proyecciones horizontales R y S de los dos puntos de contacto que se hallarán con el punto N sobre una misma línea recta.

Para hallar las proyecciones verticales de los mismos puntos se tirarán primeramente sobre LM las perpendiculares indefinidas Rr, Ss: luego, si se proyectan los puntos K, K′, en k, k', y si por el punto g se tiran las rectas gk, gk', se tendrán las proyecciones verticales de estas mismas tangentes. Estas rectas contendrán por consiguiente las proyecciones de los puntos de contacto respectivos: luego los puntos rs de sus intersecciones con las verticales Rr, Ss serán las proyecciones pedidas.

Halladas las proyecciones horizontales y verticales de los dos puntos de contacto, para construir sobre el plano horizontal las trazas de los dos planos tangentes, se concebirá por cada uno de los puntos de contacto una paralela á la recta dada. Estas rectas estarán en los planos tangentes respectivos, y se tendrán sus proyecciones horizontal y vertical tirando RU, SV, paralelas á EF, y *ru*, *sv*, paralelas á *ef*. Se construirá sobre el plano horizontal la traza T de la recta dada, y las trazas U, V de las dos últimas rectas, y las trazas TU, TV serán las trazas de los dos planos tangentes.

En lugar de concebir, por los puntos de contacto, nuevas líneas rectas, se podrian hallar las trazas de las dos tangentes GR, GS, que llenarian el mismo objeto. En quanto á las trazas de estos dos mismos planos sobre el plano vertical se las determinará por el método que ya hemos empleado algunas veces.

Se puede hacer mucho mas elegante esta solucion haciendo pasar los dos planos de proyeccion por el centro mismo de la esfera. De este modo las dos proyecciones de la esfera se confundirian en el mismo círculo, y serian mas cortas las prolongaciones de las líneas rectas. Si hemos separado las dos proyecciones, ha sido con el objeto de hacer mas clara la exposicion. Ahora es fácil el dar á la construccion toda la concision de que es susceptible.

37 *Segundo método*. Sean A y *a* (*fig. 17*) las dos proyecciones del centro de la esfera, AB ó *ab* su radio, BCD la proyeccion de su círculo máxîmo horizontal, y EF, *ef* las proyecciones de la recta dada si se concibe el plano del círculo máxîmo horizontal prolongado hasta que corte la recta dada en un cierto punto, se tendrá la proyeccion vertical de este plano tirando por el punto *a* la horizontal indefinida *bag*; el punto *g*, en que esta horizontal cortará *ef*, será la proyecccion vertical del punto en que la recta toca el plano, y se tendrá la proyeccion horizontal G de este punto proyectando *g* sobre EF.

Sentado esto, si tomando este mismo punto por vértice, se concibe una superficie cónica que abrace la esfera, y cuyas rectas generatrices la toquen todas en un punto, se tendrán las proyecciones de las dos rectas generatrices horizontales de esta superficie cónica tirando por el punto G las dos rectas GC, GD, tangentes al círculo BCD, y que le tocan en dos puntos C, D, que serán fáciles de determinar. La superficie cónica tocará la de la esfera, en la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro será la recta CD, su plano será perpendicular al exe del cono, y por consiguiente vertical, y cuya proyeccion horizontal será la recta CD.

Si por la recta dada se conciben dos planos tangentes á la superficie cónica, cada uno de ellos la tocará segun una de sus rectas generatrices, que estará al mismo tiempo sobre la superficie cónica y sobre el plano; y como esta recta generatriz toca tambien la esfera en uno de sus puntos que se halla sobre la circunferencia del círculo proyectado en CD, se sigue que este punto está al mismo tiempo sobre la superficie cónica, sobre el plano que la toca, sobre la superficie de la esfera, y sobre la circunferencia del círculo proyectado en CD, y que es un punto de contacto comun á todos estos objetos. Luego: 1.º los dos planos tangentes á la superficie cónica lo son tambien á la superficie de la esfera, y son aquellos de quienes se desea determinar la posicion: 2.º sus puntos de contacto con la esfera, hallándose en la circunferencia del círculo proyectado en CD, estarán ellos mismos proyectados en algunos de los puntos de esta recta: 3.º la recta que pasa por los dos puntos de contacto, hallándose comprehendida en el plano del mismo círculo, estará ella misma proyectada indefinidamente sobre CD.

Hagamos ahora para el plano de un círculo máxîmo, paralelo al de las proyecciones verticales, la misma operacion que acabamos de hacer para el plano del círculo máxîmo horizontal. La proyeccion horizontal de este plano será la recta BAH, indefinidamente paralela á LM; el punto en que encuentra la recta dada estará proyectado horizontalmente en la interseccion H de las dos rectas EF, BAH; y se tendrá su proyeccion vertical proyectando el punto H sobre *ef* en *h*. Si se concibe una nueva superficie cónica, cuyo vértice se halle en este punto de reunion, y que abrace la esfera como la primera, se tendrán las proyecciones verticales de las dos rectas generatrices extremas de esta superficie, tirando por el punto *h* las tangentes *h*K, *h*I, al círculo *b*KI, que le tocarán en dos puntos K, I, que se determinarán. Esta segunda superficie cónica tocará la de la esfera en la circunferencia de un nuevo círculo, cuyo diámetro será KI, y cuyo plano, que será perpendicular al de la proyeccion vertical, estará por consiguiente proyectado indefinidamente sobre KI. La circunferencia de este círculo pasará tambien por los dos puntos de contacto de la esfera con los planos tangentes que se piden: luego las proyecciones verticales de estos dos puntos de contacto se hallarán sobre alguno de los puntos de KI: luego tambien se hallará proyectada sobre KI la recta que une estos dos puntos.

De este modo la recta que une los dos puntos de contacto se halla proyectada horizontalmente sobre CD, y verticalmente sobre KI; encuentra el plano del círculo máxîmo horizontal en un punto cuya proyeccion vertical es el punto *n* de interseccion de KI con *bag*; y cuya proyeccion N se tendrá proyectando el punto *n* sobre CD.

Hecho esto, concibamos que el plano del círculo vertical, proyectado en CD, gira al rededor de su diámetro horizontal como charnela, para tomar él mismo la posicion horizontal, y que lleva consigo en su movimiento los dos puntos de contacto por los quales pasa su circunferencia, y la recta que une estos dos puntos. Se construirá este círculo en esta nueva posicion, describiendo sobre CD como diámetro el círculo CPDQ; y si se construyese la posicion que toma la recta de los dos puntos de contacto, cortaria dicha recta á la circunferencia CPDQ en dos puntos, que determinaria sobre esta circunferencia la posicion que tienen en ella, considerada en una situacion horizontal.

Como el punto N de la recta de los dos contactos se halla sobre la charnela CD, no muda de posicion en su movimiento. Por consiguiente esta recta debe aun pasar por este punto quando ha tomado la posicion horizontal. Ademas, el punto en que ella encuentra al plano del círculo máxîmo paralelo á la proyeccion vertical, punto cuya proyeccion horizontal está en el de contacto de las dos rectas CD, BAH, y cuya proyeccion vertical *t* se tendrá proyectando el punto O sobre KI; este punto, digo, que en su movimiento, al rededor de la charnela CD, describe un quarto de círculo vertical perpendicular á CD, y cuyo radio es la vertical *ot*: luego si se tira por el punto O una perpendicular á CD, y si sobre esta perpendicular se lleva *ot* de O á T, el punto T será uno de los de la recta de los contactos quando está horizontal. Luego si por los puntos N y T se tira una recta, sus dos puntos de reunion P, Q, con la circunferencia CPDQ, serán los dos puntos de contacto considerados en el plano vertical doblado sobre el horizontal.

Para tener las proyecciones horizontales de estos mismos puntos en sus posiciones naturales es menester concebir que el círculo CPDQ vuelve á su posicion primitiva girando sobre la misma charnela CD. En este movimiento los dos puntos P, Q describirán quartos de círculo en planos verticales, perpendiculares á CD, y cuyas proyecciones horizontales serán las perpendiculares PR y QS baxadas sobre CD. Luego las proyecciones horizontales de los dos puntos de contacto estarán respectivamente sobre las rectas PR y QS; pero hemos visto que tambien debian hallarse sobre CD: luego estarán en los dos puntos de reunion R y S.

Se tendrán las proyecciones verticales *r*, *s* de los mismos dos puntos, proyectando los puntos R y S sobre KI; ó lo que es lo mismo, llevando sobre las verticales R*r*, S*s*, contando desde la horizontal *bag*, *r'r* igual á PR, y *s's* igual á QS.

Despues de haber construido las proyecciones horizontales y verticales de los dos puntos de contacto, se determinarán las trazas de los dos planos tangentes como en la primera solucion.

Esta segunda solucion puede tambien simplificarse mucho haciendo pasar los planos de las proyecciones por el centro de la esfera; lo que reduce las dos proyecciones á la misma figura.

38 Estas últimas consideraciones van á conducirnos al descubrimiento de algunas propiedades notables del círculo, de la esfera, de las secciones cónicas, y de las superficies curvas del segundo grado.

Acabamos de ver que las dos superficies cónicas circunscritas á la esfera la tocaban cada una en la circunferencia de un círculo, y que estas circunferencias pasaban ámbas por los dos puntos de contacto de la esfera con los planos tangentes. Esta propiedad no es particular á las dos superficies cónicas que hemos considerado, sino que conviene tambien á todas quantas tengan sus vértices en la recta dada, y que al mismo tiempo esten circunscritas á la esfera. Luego, si se concibe una primera superficie cónica que, teniendo su vértice sobre la recta dada, esté circunscrita á la esfera, y si se supone que esta superficie se mueva de modo que su vértice corra la recta sin que dexe de ser circunscrita y tangente á la esfera; en cada una de sus posiciones tocará la esfera en la circunferencia de un círculo; todas estas circunferencias pasarán por los mismos dos puntos, que serán los contactos de la esfera con los dos planos tangentes; y los planos de estos círculos se cortarán todos segun una misma línea recta, que será la de los dos contactos. En fin, si se concibe el plano tirado por la recta dada y por el centro de la esfera, este plano, que pasará por los exes de todas las superficies cónicas, será perpendicular á los planos de todos los círculos de contacto, y por consiguiente á la recta, que es su comun interseccion; y cortará todos estos planos en líneas rectas, que pasarán por un mismo punto.

Recíprocamente dadas una esfera y una línea recta, si se concibe por la recta tantos quantos planos se quieran, que cortarán la esfera cada uno segun un círculo, y si por cada uno de estos círculos se concibe la superficie cónica recta de qual él mismo fuese la base, y que estuviese circunscrita á la esfera, los vértices de todas estas superficies cónicas estarán todos en una misma línea recta, diferente de la recta dada.

39 Considerando solamente lo que pasa en el plano tirado por la recta dada y por el centro de la esfera, se llega á las dos

proposiciones siguientes, que son las conseqüencias inmediatas de lo que precede.

„Dados en un plano (*fig. 18 y 19*) un círculo cuyo centro sea A, y una recta BC; si despues de haber tirado por un punto qualquiera D de la recta dos tangentes al círculo, y la recta EF que pasa por los dos puntos de contacto, se concibe que el punto D se mueva por la recta, llevándose consigo las dos tangentes, sin que cesen de tocar al círculo, los dos puntos de contacto mudarán de posicion, igualmente que la recta EF que los une; pero esta recta pasará siempre por un mismo punto N, que se halla sobre la perpendicular AG, baxada del centro del círculo sobre la recta. Recíprocamente, si por un punto N tomado en el plano de un círculo, se tiran tantas quantas rectas EF se quieran, que cortarán cada una la circunferencia del círculo en dos puntos; y si por estos dos puntos se tiran al círculo dos tangentes ED, FD, que se cortarán en alguna parte en un punto D, la serie de todos los puntos de interseccion hallados del mismo modo estará sobre una misma línea recta BC perpendicular á AN."

Si el círculo goza de la propiedad que acabamos de enunciar, no es porque todos sus puntos se hallan igualmente distantes del centro, sino porque es una curva de segundo grado, y todas las secciones cónicas se hallan en el mismo caso.

En efecto, sean AEBF (*fig. 20*) una seccion cónica qualquiera, y CD una recta dada en su plano, concibamos que la curva gira al rededor de uno de sus exes AB para engendrar una superficie de revolucion, y concibamos los dos planos tangentes á esta superficie tirados por la recta CD; los dos planos tendrán cada uno su punto de contacto particular. Sentado esto, si tomando por vértice un punto qualquiera H de la recta CD, se concibe la superficie cónica circunscrita y tangente á la superficie de revolucion, tocará esta última superficie en una curva, que pasará necesariamente por los dos puntos de contacto con los planos tangentes. Esta curva será plana, su plano, que será perpendicular al de la seccion cónica dada, se proyectará sobre este último, segun una recta EF; y esta recta pasará por los puntos de contacto de las tangentes á la seccion cónica tiradas por el punto H. Si se supone ahora que el vértice H de la superficie cónica se mueve sobre la recta DC, sin que esta superficie cese de ser circunscrita y tangente á la superficie de revolucion, en cada una de sus posiciones su curva de contacto tendrá las mismas propiedades de pasar por los dos puntos de contacto con los planos tangentes; de ser plana, y de tener su plano perpendicular á la seccion cónica. Luego los planos de todas las curvas de contacto pasarán por la recta que une los dos puntos de contacto, y que es ella misma perpendicular al plano de la seccion cónica: luego en fin las proyecciones de todos los planos serán líneas rectas, que pasarán todas por la proyeccion N de la recta que une los dos puntos de contacto.

40 En fin, esta proposicion no es sino un caso particular de otra mas general, que tiene lugar en las tres dimensiones, y que nos contentarémos aquí con enunciarla solamente.

„Dadas en el espacio una superficie curva qualquiera de segundo grado, y una superficie cónica circunscrita que la toca, y cuyo vértice se halla en un punto qualquiera, si la superficie cónica se mueve sin cesar de ser circunscrita á la primera, y de tocarla, pero de modo que su vértice corra una recta qualquiera, el plano de la curva de contacto de las dos superficies pasará siempre por una misma línea recta (que la determinarán los contactos de la superficie de segundo grado con los dos planos tangentes que pasan por la recta de los vértices); y si la superficie cónica se mueve de modo que su vértice esté siempre en un mismo plano, el plano de la curva de contacto pasará siempre por un mismo punto."

41 *Segunda qüestion.* Por un punto dado tirar un plano que sea tangente al mismo tiempo á las superficies de dos esferas dadas.

Solucion. Sean A, *a* (*fig.* 21) las dos proyecciones del centro de la primera esfera, B, *b* las del centro de la segunda, y C, *c* las del punto dado. Despues de haber tirado las rectas indefinidas AB, *ab*, proyecciones de la que pasaria por los dos centros, y despues de haber construido las proyecciones GEF, *gef*, HIK, *hik* de los círculos máxîmos de las dos esferas paralelos á los planos de proyeccion, se concebirá una superficie cónica circunscrita al mismo tiempo á las dos esferas, y que las toca á ámbas. Esta superficie tendrá su vértice en la recta que pasa por los dos centros. Se tirarán á los dos círculos GEF, HIK las dos tangentes comunes EH, FK, que se cortarán en un punto D de la recta AB; y este punto será la proyeccion horizontal del vértice del cono: se tendrá la proyeccion vertical del mismo punto, proyectando el punto D en *d* sobre la prolongacion de *ab*. En fin, se trazarán las proyecciones CD, *cd* de la recta tirada por el vértice del cono y por el punto dado. Sentado esto, si por esta última recta se conciben dos planos tangentes á la superficie cónica, la tocarán cada uno en una de sus rectas generatrices; y por consiguiente serán ámbos al mismo tiempo tangentes á las dos esferas. La qüestion se reduce por consiguiente á tirar por la recta que pasa por el vértice del cono y por el punto dado dos planos tangentes á la superficie de una de las esferas; lo que se executará como en el problema anterior, y los dos planos serán al mismo tiempo tangentes á la segunda esfera.

Es menester observar que se pueden concebir dos superficies cónicas circunscritas á las dos esferas dadas. La primera las envuelve ámbas por la parte de fuera, y tiene su vértice mas allá de una de las esferas respecto á la otra: los planos tangentes á esta superficie cónica tocan cada uno á las dos esferas del mismo lado. La segunda superficie cónica envuelve las esferas, la una por dentro, la otra por fuera, y tiene su vértice entre los dos centros. Se halla la proyeccion horizontal D' de este vértice tirando á los círculos EFG y HIK las dos tangentes interiores, que se cortan en un punto de la recta AB; y se tiene su proyeccion vertical proyectando el punto D' en d' sobre ab. Los dos planos tangentes tirados á esta superficie cónica tocan tambien cada uno las dos esferas; pero tocan la primera de un lado y la segunda del otro. De este modo quatro planos diferentes pueden satisfacer á la qüestion; para dos de ellos las dos esferas estan del mismo lado que el plano, para los otros dos estan á lados diferentes.

42 *Tercera qüestion.* Tirar un plano tangente al mismo tiempo á tres esferas dadas de magnitud y de posicion.

Solucion. Concibamos el plano tangente al mismo tiempo á las tres esferas, é imaginemos primero una superficie cónica circunscrita á las dos esferas primeras, y que las toca á ámbas; el plano tangente tocará esta superficie cónica en una de sus líneas generatrices, y pasará por el vértice del cono. Si se imagina una segunda superficie cónica circunscrita á la primera esfera, y á la tercera, el mismo plano tangente la tocará igualmente segun una de sus rectas generatrices, y pasará por consiguiente por su vértice. En fin, si se concibe una tercera superficie cónica que abrace y toque la segunda esfera y la tercera, el plano tangente la tocará aun en una de sus rectas generatrices, y pasará por su vértice. Así los vértices de las tres superficies cónicas estarán en el plano tangente; estarán tambien en el plano que pasa por los centros de las esferas, y que contienen los tres exes: luego estarán al mismo tiempo en dos planos diferentes y en línea recta. De aquí se sigue, que si se construyen, como lo hemos indicado en el problema anterior, las proyecciones horizontales y verticales de estos vértices, de los quales dos bastan, se podrá hacer pasar por estas proyecciones la de una recta que se encuentra sobre el plano tangente. La qüestion se reduce por consiguiente á tirar por una recta dada un plano tangente á aquella de las tres esferas que se quiera; lo que se executará por los métodos precedentes, y este plano será tangente á las otras dos.

43 Es menester observar, que puesto que se puede siempre concebir para dos esferas qualesquiera dos superficies cónicas que las envuelvan y las toquen á ámbas, de las quales la primera tenga su vértice mas allá de uno de los centros respecto al otro, y la segunda entre los dos centros, es evidente que en la qüestion precedente habrá seis superficies cónicas, de las quales tres estarán circunscritas por fuera á las tres esferas tomadas de dos en dos, y las otras tres tendrán sus vértices entre las esferas. Los vértices de estos seis conos estarán distribuidos de tres en tres sobre quatro líneas rectas, por cada una de las quales se podrán tirar dos planos tangentes al mismo tiempo á las tres esferas. Así habrá ocho planos diferentes que satisfagan esta qüestion: dos tocan las tres esferas del mismo lado respecto á ellos; los otros seis estan colocados de modo, que tocan dos de las esferas de un lado y la tercera del otro.

44 Estas consideraciones nos conducen á la siguiente proposicion.

„Dados sobre un plano tres círculos en magnitud y posicion (*fig.* 22), si considerándolos de dos en dos, se les tiran tangentes exteriores prolongadas hasta que se corten, los tres puntos de interseccion D, E, F, que se obtendrán de este modo, estarán en línea recta."

En efecto, si se conciben las tres esferas, de las quales estos círculos son los círculos máxîmos, y un plano que las toque todas tres exteriormente, este plano tocará tambien las tres superficies cónicas circunscritas á las esferas consideradas de dos en dos, y pasará por los tres vértices D, E, F. Estos tres vértices estan tambien en el plano de los tres centros: luego estan sobre dos planos diferentes, y por consiguiente en línea recta. „Si á los mismos círculos, considerados de dos en dos, se les tiran las tangentes interiores, que se cruzarán, los tres nuevos puntos de interseccion G, H, I estarán de dos en dos en línea recta con uno de los tres primeros; de suerte que los seis puntos D, E, F, G, H, I serán las intersecciones de quatro rectas."

En fin, esta proposicion no es mas que un caso particular de la siguiente, que tiene lugar en las tres dimensiones.

„Dadas en magnitud y en posicion quatro esferas en el espacio, si se conciben las seis superficies cónicas, que circunscriban exteriormente estas esferas consideradas de dos en dos, los vértices de los seis conos estarán en un mismo plano y en las intersecciones de quatro rectas; y si se conciben las otras seis superficies cónicas circunscritas interiormente, esto es, cuyos vértices se hallen entre los centros de dos esferas, los vértices de estos seis nuevos conos estarán de tres en tres en un mismo plano con tres de los primeros.

45 *Quarta qüestion.* Por un punto tomado arbitrariamente, tirar un plano tangente á una superficie cilíndrica dada.

Solucion. Sea EIFK (*fig.* 23) la traza de la superficie cilíndrica sobre el plano horizontal; traza que supondrémos dada. Sean AB, *ab* las dos proyecciones dadas de la recta á la qual la generatriz debe ser siempre paralela, y C, *c* las del punto dado. Si se concibe por este punto una paralela á la recta generatriz, esta recta se hallará en el plano que se busca; y los puntos en que corta los planos de proyeccion estarán sobre las trazas del plano tangente. Luego, si por este punto C se tira CD paralela á AB, y por el punto *c*, *cd* paralela á *ab*, se tendrán las dos proyecciones de esta recta; y si despues de haber prolongado *cd* hasta que encuentre LM en un punto *d* se proyecta el punto *d* en D sobre CD, el punto D será aquel en que esta recta toca al plano horizontal, y por consiguiente un punto de la traza del plano tangente. Pero la traza horizontal del plano tangente debe ser tangente á la curva EIFK: luego si por el punto D se tiran á esta curva todas las tangentes posibles DE, DF &c., se tendrán las trazas horizontales de todos los planos tangentes que pueden pasar por el punto dado. Si por los puntos de contacto E, F &c. se tiran á AB las paralelas EG, FH &c., se tendrán las proyecciones horizontales de las rectas generatrices, en que tocan á la superficie cilíndrica los diferentes planos tangentes; en fin, se tendrán las proyecciones verticales *eg*, *fh* &c. de estas generatrices ó de estas rectas de contacto proyectando los puntos E, F &c. sobre el plano vertical en *e*, *f* &c., y tirando por estos últimos puntos paralelas indefinidas á *ab*. En quanto á las trazas de los planos tangentes sobre el plano vertical se las hallará por lo visto en la *fig.* 12.

46 *Quinta qüestion.* Tirar un plano tangente á una superficie cónica dada por un punto tomado arbitrariamente.

Como la solucion de esta qüestion difiere muy poco de la de la precedente, nos contentarémos con indicar la construccion en la fig. 24, en la qual la curva EGFH es la traza dada de la superficie cónica; A y *a* son las proyecciones del vértice, y C, *c* son las del punto dado, por el qual debe pasar el plano tangente.

47 *Sexta qüestion*. Por una recta dada, tirar un plano tangente á una superficie de revolucion dada.

Solucion. Supondrémos que el exe de la superficie de revolucion sea perpendicular á uno de los dos planos de proyeccion; lo que no alterará la generalidad de la solucion, porque podemos siempre tomar estos planos de modo que se verifique esta condicion.

Sea pues A (*fig*. 25) la proyeccion horizontal dada del exe de la superficie, *aa'* su proyeccion vertical, *apid'* la curva generatriz de la superficie, y BC, *bc* las dos proyecciones dadas de la recta por la qual debe pasar el plano tangente. Báxese del punto A sobre BC la perpendicular AD, que será la proyeccion horizontal de la mas corta distancia entre el exe y la recta dada, y proyéctese el punto D en *d* sobre *bc*.

Sentado esto, concibamos primeramente que esté tirado el plano tangente: luego supondrémos que la recta dada gira al rededor del exe de revolucion, conservándose á la misma distancia del exe, sin variar de inclinacion respecto al plano horizontal, y que lleva consigo el plano tangente, de modo que continúe tocando siempre la superficie: es evidente, que en virtud de este movimiento el punto de contacto de la superficie y del plano mudará de posicion; pero como el plano tangente guarda siempre la misma inclinacion, este punto de contacto no variará de altura sobre la superficie, y se moverá en la circunferencia de un círculo horizontal, cuyo centro estará en el exe. Ademas, la recta dada engendrará por su movimiento una segunda superficie de revolucion al rededor del mismo exe, á la qual el mismo plano tangente será tambien tangente en todas sus posiciones.

En efecto, concibamos un plano por el exe, y por el punto de contacto del plano tangente con la primera superficie: este plano cortará la recta generatriz en un punto, que será el de contacto del mismo plano tangente con la segunda; pues ademas de la recta generatriz, por la qual él pasa en este punto, pasa tambien por la tangente del círculo horizontal en el mismo punto, puesto que tambien pasa por la tangente del círculo horizontal en el punto de contacto con la primera superficie, y que por la propiedad de las superficies de revolucion estas dos tangentes son paralelas.

Como debemos resolver la qüestion por medio de la segunda superficie de revolucion, es necesario construir la curva segun la qual dicha segunda superficie de revolucion se halla cortada por un plano que pase por el exe; y supondrémos que este plano es paralelo al plano vertical de proyeccion, y por consiguiente se proyecta en el plano horizontal sobre una recta AF paralela á LM.

Tómese sobre la recta dada un punto qualquiera, cuyas proyecciones sean E y *e*, y busquemos el punto en que encuentra en su movimiento al plano de la seccion. De contado este punto describirá al rededor del exe de revolucion un arco de círculo horizontal, cuya proyeccion horizontal se tendrá describiendo desde el punto A como centro, y con el intervalo AE, el arco EF, hasta que encuentre la recta AF en algun punto F; y se tendrá la proyeccion vertical de este arco tirando por el punto *e* la horizontal indefinida *ef*. El punto F será por consiguiente la proyeccion horizontal del contacto del punto cuyo movimiento consideramos con el plano de la seccion, si se proyecta el punto F en *f* sobre *ef*, el punto *f* será la proyeccion vertical de este contacto, y por consiguiente uno de los puntos de la seccion. Si se repite esta misma operacion para otros tantos puntos como se quieran, tomados sobre la recta dada, se tendrán otros tantos puntos *g*, *f*, *r*, *n*, por los quales se hará pasar la curva que se pide.

Hecho esto, supongamos que la recta dada y el plano tangente, por su revolucion simultánea al rededor del exe, hayan llegado á una posicion tal, que el plano tangente sea perpendicular al plano vertical de proyeccion. En esta posicion, la proyeccion sobre este plano será una línea recta, tangente al mismo tiempo á las dos curvas *apid'*, *gfrn*. Luego si se tiran á estas dos curvas todas las tangentes comunes, tales como *gi*, *np*, se tendrán las proyecciones de todos los planos tangentes que satisfacen la qüestion, considerados en la posicion que han tomado, quando por la rotacion han llegado á ser sucesivamente perpendiculares al plano vertical. Los puntos de contacto *i*, *p* de estas tangentes, con la generatriz de la primera superficie, determinarán las alturas de los de esta superficie con todos los planos tangentes; por consiguiente, si se tiran por estos puntos las horizontales indefinidas *it*, *ps*, se hallarán en ellas las proyecciones verticales de los puntos de contacto de la superficie con los planos; y si del punto A como centro, y con radios respectivamente iguales á *it* y á *ps*, se describen arcos de círculo IK, PQ, estos arcos contendrán las proyecciones horizontales de los mismos puntos. Por consiguiente, para acabar de determinarlos no falta mas que ver sobre qué meridianos de la superficie de revolucion deben de hallarse, para lo qual servirán los puntos de contacto *g, n*.

Para esto, despues de haber proyectado los puntos *g, n* sobre AG, en G y N, si desde el punto A como centro, y con los intervalos sucesivamente iguales á AG y AN, se describen los arcos de círculo GH, NO, hasta que corten la recta BC en dos puntos H y O, estos arcos representan para cada plano tangente el camino de rotacion que ha debido hacer la recta que pasa por sus contactos con las dos superficies, para llegar al plano vertical paralelo al de proyeccion. Luego se tendrán las proyecciones horizontales de estas mismas rectas, consideradas en sus posiciones naturales, tirando por el punto A las rectas AH, AO. En fin, los puntos K, Q, en que las últimas rectas cortan los arcos correspondientes IK, PQ, son las proyecciones horizontales de los puntos de contacto de la primera superficie con los planos tangentes tirados por la recta dada.

En quanto á las proyecciones verticales de los mismos puntos se tendrán, proyectando los puntos K, Q en *k*, *q* sobre las horizontales respectivas *it* y *ps*.

Determinadas una vez las proyecciones horizontales y verticales de los puntos de contacto, se construirán las trazas de todos los planos tangentes por los métodos que ya hemos empleado.

Se puede con facilidad generalizar este método, y aplicarlo á las superficies engendradas por qualquiera curva, de forma constante y de posicion variable en el espacio.

III.

De las intersecciones de las superficies curvas.

48 Quando enteramente se conocen y estan determinadas las generaciones de dos superficies curvas; quando para cada una de ellas la serie de todos los puntos del espacio, por los quales pasa, no tiene nada de arbitrario; quando tomando á voluntad una de las proyecciones de sus puntos se puede construir la otra; si estas dos superficies tienen algunos puntos comunes en el espacio, la posicion de estos puntos comunes está absolutamente determinada; depende de la forma de las dos superficies curvas y de sus posiciones respectivas; y por su naturaleza la posicion de dichos puntos puede siempre deducirse de los supuestos que se hayan hecho para la generacion de las superficies, pues es una conseqüencia necesaria de ellos.

La serie de todos los puntos comunes de dos superficies curvas determinadas forma en general en el espacio una cierta curva, que en casos muy particulares puede hallarse sobre un cierto plano, y no tener mas de una sola curvatura; en otros casos mas raros puede ser una línea recta, y en fin en otros infinitamente mas raros aun puede reducirse á un punto único; pero que en general es lo que llamamos *curva de doble curvatura*, porque participa ordinariamente de las curvaturas de las dos superficies curvas, sobre cada una de las quales se halla al mismo tiempo, y de las quales es la interseccion comun.

49 Hay entre las operaciones de la análisis y los métodos de la geometría descriptiva una correspondencia, de que es menester dar aquí una idea.

En el álgebra, quando un problema está puesto en equacion, y que se tienen tantas equaciones como incógnitas, se pueden obtener otras tantas equaciones, en cada una de las quales no entre sino una de las incógnitas; lo que proporciona el medio de conocer el valor de cada una de ellas. La operacion por la qual se consigue esto, y que se llama *eliminacion*, consiste en hacer desaparecer, por medio de una equacion, una de las incógnitas en todas las otras equaciones; y haciendo desaparecer de este modo sucesivamente las diferentes incógnitas, se llega á una equacion final, que no contiene mas de una sola, y de la qual debe deducirse su valor.

El objeto de la eliminacion en el álgebra tiene la mayor analogía con las operaciones, por las quales se determinan en la geometría descriptiva las intersecciones de las superficies curvas.

En efecto, supongamos que considerando un punto en el espacio, y representando por x, y, z las distancias de este punto á tres planos rectangulares entre sí, se establezca una relacion entre estas tres distancias, y que esta relacion sea dada por una equacion, en la qual entran las tres cantidades x, y, z, y constantes. En virtud de esta relacion la posicion del punto no estará determinada; puesto que las cantidades x, y, z podrán mudar de valor, y por consiguiente el punto variará de posicion en el espacio, sin que por esto dexe de exîstir la relacion indicada por la equacion; y la superficie curva, que pasa por todas las posiciones que puede ocupar de este modo el punto, sin que se altere la relacion que exîste entre estas tres coordenadas, es aquella á la qual pertenece la equacion.

Por exemplo, supongamos que una esfera, cuyo radio sea A, tenga su centro en el punto de la comun interseccion de los tres planos rectangulares; y que considerando un cierto punto sobre la superficie de la esfera, se imaginen perpendiculares baxadas de este punto sobre los tres planos, y que se las represente por x, y, z; es evidente que el radio de la esfera dirigido al punto que se considera, será la diagonal de un paralelepípedo rectángular, cuyas tres aristas son x, y, z; que su quadrado será igual á la suma de los quadrados de las tres aristas, y que por consiguiente se tendrá la equacion $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Sentado esto, si el punto muda de posicion sobre la superficie de la esfera, sus distancias x, y, z á los tres planos rectangulares variarán; pero su distancia al centro será la misma, y la suma de los quadrados de sus tres coordenadas, que es siempre igual al quadrado del radio, tendrá siempre el mismo valor: se tendrá pues aun entre las coordenadas de este punto la relacion que expresa la equacion $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Esta equacion, que tiene lugar para todos los puntos de la superficie de la esfera, y que no conviene sino á ellos, es la equacion de esta superficie. Todas las superficies curvas tienen de este modo cada una su equacion; y si no es fácil tener siempre esta equacion expresada en cantidades tan simples como son las distancias x, y, z, en todos los casos es posible obtenerla en cantidades mas complicadas, tales como las inclinaciones de los planos tangentes, los radios de curvatura: para nuestro objeto basta el haber hecho conocer una que sirva de exemplo.

Ahora, si teniendo en x, y, z las equaciones de dos superficies curvas diferentes, suponiendo que para los puntos de las dos superficies se tomen las distancias con respecto á unos mismos planos rectangulares, se elimina una de las tres cantidades x, y, z, por exemplo z, de las dos equaciones; por la simultaneidad de estas dos equaciones se establece desde luego, que no es de todos los puntos de la primera superficie indistintamente, ni tampoco de todos los de la segunda, de que se trata, sino únicamente de los de su interseccion, respecto á cada uno de los quales las dos equaciones deben tener lugar, puesto que se hallan al mismo tiempo sobre las dos superficies. La equacion entre x, y, que resulta de la eliminacion de z, expresa la relacion que exîste entre estas dos distancias para todos los puntos de interseccion, qualquiera que sea la distancia z que ha desaparecido, y de que no se trata ya en la equacion; por consiguiente esta equacion es la de la proyeccion de la interseccion de las dos superficies sobre el plano perpendicular á las z.

Se ve pues que en el álgebra el objeto de la eliminacion entre muchas equaciones de tres incógnitas es determinar sobre los tres planos, á los quales se refiere todo el espacio, las proyecciones de las intersecciones de las superficies á las quales pertenecen las equaciones.

50 La correspondencia entre las operaciones de la análisis y los métodos de la geometría descriptiva no se limita á lo que acabamos de exponer, sino que se extiende á todo. Si para producir qualquiera generacion en el espacio se hacen mover puntos, líneas curvas, superficies, estos movimientos pueden siempre ser dictados por operaciones analíticas; y los objetos nuevos á que dan lugar se hallan expresados por los mismos resultados de las operaciones. Recíprocamente, no hay ninguna operacion en la análisis de tres dimensiones, que no sea la escritura de un movimiento que ha tenido lugar en el espacio, y que ella misma ha dictado. Para aprender las matemáticas del modo mas ventajoso es menester que el discípulo se acostumbre con tiempo á percibir la correspondencia que tienen entre sí las operaciones de la análisis y las de la geometría; es menester que se ponga en estado, por una parte, de poder escribir analíticamente todos los movimientos que él puede concebir en el espacio, y por otra de representarse continuamente en el espacio estos mismos movimientos, de los quales cada una de las operaciones analíticas es la escritura.

51 Volvamos ahora á nuestro objeto, que es el método de determinar las proyecciones de las intersecciones de las superficies curvas.

Para exponer este método con mayor claridad no le presentarémos desde luego con toda la elegancia de que es susceptible, llegarémos á ella por grados. Ademas, el enunciado será general y aplicable á dos superficies qualesquiera; y aunque las letras que emplearémos se refieren á la fig. 26, que presenta el caso particular de dos superficies cónicas, cuyas bases son circulares y los exes verticales, no obstante es menester concebir siempre que las superficies de que se trata pueden ser, cada una en particular, qualquier otra superficie diferente de la superficie cónica.

52 *Primer problema general.* Conocidas las generaciones de dos superficies curvas, y estando determinados todos los datos que fixan estas generaciones sobre los planos de proyeccion; construir las proyecciones de la curva de doble curvatura, interseccion comun de estas dos superficies.

Solucion. Concíbase una serie de planos indefinidos, colocados en el espacio de un modo determinado; estos planos, por exemplo, podrán ser todos horizontales, y es en efecto lo que supondrémos por ahora. En este caso la proyeccion vertical de cada uno de ellos será una recta horizontal indefinida; y siendo dueños de tirarlos á distancias arbitrarias, supondrémos que en la proyeccion vertical se hayan tirado tantas rectas horizontales (*fig.* 26) *ee'*, *ee'*, *ee'* &c. como se hayan querido, y que la serie de estas rectas sea la proyeccion vertical de la serie de los planos que se han concebido. Sentado esto, se hará para cada uno de estos planos, y respecto á la recta *ee'*, que es su proyeccion, la misma operacion que vamos á indicar respecto á aquel cuya proyeccion es EE'.

El plano EE' cortará la primera superficie en una cierta curva, que se podrá construir siempre que se conozca la generacion de la superficie; pues esta curva esta formada por la serie de los puntos en que corta al plano EE' la generatriz en todas sus posiciones. Esta curva, siendo plana y horizontal, tendrá una proyeccion horizontal, igual, semejante á ella, y colocada del mismo modo; por consiguiente se podrá construir esta proyeccion, y supondrémos que sea la curva FGHIK.

Hecho esto, puede suceder que las dos curvas en que el mismo plano EE' corta las dos superficies se corten ó no entre sí: si no se cortan, por mas que se prolonguen, será una prueba de que á la altura del plano EE' las dos superficies no tienen ningun punto comun; pero si estas dos curvas se cortan, será en otros tantos puntos quantos haya comunes á las dos superficies, y que por consiguiente serán otros tantos de la interseccion pedida. En efecto, los puntos comunes de interseccion de las dos curvas, en quanto pertenecen á la primera, se hallan sobre la primera de las dos superficies propuestas, y en quanto pertenecen á la segunda se hallan tambien sobre la segunda de las dos superficies propuestas: luego, hallándose al mismo tiempo sobre ámbas curvas, lo estan tambien sobre las dos superficies.

Las proyecciones horizontales de los puntos en que se cortan las dos curvas deben hallarse sobre la proyeccion de la primera y sobre la proyeccion de la segunda: luego los puntos F, G, en que se cortan las dos curvas, serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos de la interseccion pedida de las dos superficies curvas. Para tener las proyecciones verticales de los mismos puntos es menester observar que todos ellos estan comprehendidos en el plano horizontal EE', y que sus proyecciones deben hallarse sobre la recta EE'. Luego si se proyectan los puntos F, G sobre EE' en *f*, *g*, se tendrán las proyecciones verticales de los mismos puntos.

Si se hace ahora para todas las otras horizontales *ee'*, *ee'* &c. las mismas operaciones que acabamos de hacer para EE', se hallará para cada una de ellas, en la proyeccion horizontal, una serie de nuevos puntos F, G &c., y en la proyeccion vertical una serie de nuevos puntos *f*, *g* &c. Despues, si se hace pasar por todos los puntos F el ramo de una curva, por todos los puntos G otro ramo, y así sucesivamente, el conjunto de todos estos ramos, que podrán á veces volver el uno sobre el otro, será la proyeccion horizontal de la interseccion de las dos superficies; del mismo modo, si por los puntos *f* se hace pasar el ramo de una curva, por todos los puntos *g* otro ramo, y así sucesivamente el conjunto de todos estos ramos, que podrán tambien á veces volver los unos sobre los otros, será la proyeccion vertical pedida.

53 El método que acabamos de exponer es general, aun suponiendo que se haya elegido por sistema de planos secantes una serie de planos horizontales. Vamos á ver que en ciertos casos la eleccion del sistema de planos secantes no es indiferente; que á veces se puede elegir tal que resulten construcciones mas fáciles y mas elegentes, y aun que puede ser ventajoso, en lugar de un sistema de planos, emplear una serie de superficies curvas, que no difieren entre sí sino por una de sus dimensiones.

Para construir la interseccion de dos superficies de revolucion, cuyos exes son verticales, el sistema de planos mas ventajoso es una serie de planos horizontales; pues cada uno de los planos corta las dos superficies en circunferencias de círculos cuyos centros estan sobre los exes respectivos, cuyos radios son iguales á las ordenadas de las curvas generatrices tomadas á la altura del plano secante, y cuyas proyecciones horizontales son círculos conocidos de magnitud y de posicion. En este caso, todos los puntos de la proyeccion horizontal de la interseccion de las dos superficies se hallan por medio de intersecciones de arcos de círculo. Se echa de ver que si los exes de las superficies de revolucion fuesen paralelos entre sí, pero no verticales, seria menester mudar de planos de proyeccion, y elegirlos de modo que el uno de ellos fuese perpendicular á los exes.

54 Si se tratase de construir la interseccion de dos superficies cónicas de qualesquiera bases, y cuyas trazas sobre el plano horizontal fuesen dadas ó construidas, el sistema de planos horizontales conduciria á operaciones que serian demasiado largas para este caso; pues cada uno de los planos horizontales cortaria las dos superficies en curvas, que serian á la verdad semejantes á las trazas de las superficies respectivas; pero estas curvas no serian igua-

les á las trazas; seria menester construirlas por puntos, cada una en particular, mientras que, si despues de haber tirado una recta por los vértices de los conos, se emplea el sistema de planos que pasen por esta recta, cada uno de estos planos cortará las dos superficies cónicas en quatro rectas; y estas rectas, que estarán en el mismo plano, se cortarán, ademas de en el vértice, en otros quatro puntos, que estarán sobre la interseccion de las dos superficies. En este caso, cada uno de los puntos de la proyeccion horizontal de la interseccion, se construirá por la interseccion de dos líneas rectas.

55 El sistema de planos horizontales no seria el mas favorable que se podria elegir para dos superficies cilíndricas de bases qualesquiera, y cuyas generatrices estuviesen diversamente inclinadas. Cada uno de los planos cortaria á la verdad las dos superficies en curvas semejantes é iguales á sus trazas respectivas; pero las curvas, que no corresponderian verticalmente á las trazas, tendrian por proyecciones curvas tales, que estarian distantes de las trazas, y que seria menester construir por puntos. Si se elige el sistema de planos paralelos al mismo tiempo á las generatrices de las dos superficies, cada uno de estos planos cortará las dos superficies en líneas rectas, y estas rectas se cortarán en puntos, que pertenecerán á la interseccion de las dos superficies. De este modo se construirán los puntos de la proyeccion horizontal por medio de intersecciones de líneas rectas. Finalmente, esto no es sino una conseqüencia necesaria de lo que hemos dicho para el caso de dos superficies cónicas.

56 En fin, para dos superficies de revolucion, cuyos exes estuviesen en el mismo plano, pero sin ser paralelos, no es el sistema de planos el que convendria elegir, sino el de superficies esféricas, que tendrian su centro comun en el punto de concurso de los dos exes; pues cada una de las superficies esféricas cortaria las dos superficies de revolucion en las circunferencias de dos círculos, cuyos centros se hallarian sobre los exes respectivos, y cuyos planos serian perpendiculares al plano tirado por los dos exes; y los puntos de interseccion de estas dos circunferencias, que estarian al mismo tiempo sobre la superficie esférica y sobre las dos superficies de revolucion, pertenecerian á la interseccion pedida. Así los puntos de la proyeccion de la interseccion se construirian por medio de intersecciones, de círculos y de líneas rectas. En este caso la posicion, la mas ventajosa de los dos planos de proyeccion, es que el uno sea perpendicular á uno de los exes, y que el otro sea paralelo á los dos exes. Este corto número de observa-

ciones, respecto á las superficies curvas que se hallan con mas freqüencia, basta para hacer ver el modo como ha de emplearse el método general, y como conociendo la generacion de las superficies curvas se puede elegir la especie de seccion que debe dar construcciones mas fáciles.

57 Quando dos superficies curvas tienen determinadas las formas, y las posiciones respectivas, no solamente la curva de su interseccion es determinada en el espacio, sino que aun todas las afecciones de estas curvas se deducen inmediatamente. Así, por exemplo, en cada uno de sus puntos es determinada la direccion de su tangente: lo mismo sucede con la direccion de su plano normal, esto es, del plano que corta la curva en ángulo recto, y que por consiguiente es perpendicular á la tangente en el punto de interseccion. Aunque tendrémos á menudo en lo sucesivo ocasion de considerar los planos normales á las curvas de doble curvatura, no entrarémos aquí por lo que hace á su determinacion en ningun detalle, porque siendo siempre estos planos perpendiculares á las tangentes, nos bastará haber dado el modo de construir las proyecciones de las tangentes á las secciones de las superficies curvas.

58 *Segundo problema general.* Por un punto tomado á voluntad sobre la interseccion de dos superficies curvas, tirar la tangente á esta interseccion.

Solucion. El punto tomado á voluntad sobre la interseccion de las dos superficies curvas se halla al mismo tiempo sobre la una y sobre la otra de estas dos superficies. Luego si por este punto, considerado sobre la primera superficie, se tira á dicha superficie un plano tangente, este plano tocará la interseccion en el punto que se considera. Igualmente, si por el mismo punto, considerado sobre la segunda superficie, se tira un plano tangente á esta superficie, este plano tocará la interseccion en el punto que se considera. Los dos planos tangentes tocarán pues la interseccion en el mismo punto, que es comun á ámbos, y por consiguiente uno de aquellos de la recta en que se cortan: luego la interseccion de los dos planos tangentes será la tangente que se pide.

Este problema da lugar á la siguiente observacion, que es de un gran uso en la geometría descriptiva.

„La proyeccion de la tangente de una curva de doble curvatura es tangente á la proyeccion de la curva, y su punto de contacto es la proyeccion del de la curva de doble curvatura."

En efecto, si por todos los puntos de la curva de doble curvatura se conciben perpendiculares baxadas sobre uno de los planos de proyeccion, por exemplo, sobre el plano horizontal, todas estas perpendiculares estarán sobre una superficie cilíndrica vertical, que será cortada por el plano horizontal en la proyeccion misma de la curva. Del mismo modo, si por todos los puntos de la tangente á la curva de doble curvatura se conciben baxadas verticales, estarán en un plano vertical, que será cortado por el plano horizontal en la proyeccion misma de la tangente. Como la superficie cilíndrica y el plano vertical se tocan evidentemente en toda la extension de la vertical baxada desde el punto de contacto, que le es comun, las intersecciones de la superficie cilíndrica y del plano con el plano horizontal se tocarán en un punto, que será la interseccion de la recta del contacto de la superficie cilíndrica y del plano vertical. Luego, en fin, las proyecciones de una curva de doble curvatura y de una de sus tangentes se tocan en un punto, que es la proyeccion del punto de contacto de la curva.

59 Vamos ahora á hacer la aplicacion de todo lo que precede á algunos casos particulares; y para empezar por consideraciones simples, supondrémos primero que una de las dos superficies, cuya interseccion es menester determinar, sea un plano.

Primera qüestion. Construir la interseccion de una superficie cilíndrica dada con un plano dado de posicion.

Siendo arbitraria la posicion de los planos de proyeccion, supondrémos primero, lo que siempre es posible, que se hayan elegido estos dos planos de modo que el uno sea perpendicular á la generatriz de la superficie, y que el otro sea perpendicular al plano secante, porque, en esta suposicion, la construccion es mucho mas fácil; despues, para habituar á los discípulos á las proyecciones, supondrémos que los dos planos de proyeccion esten colocados de qualquier modo.

Solucion. Primer caso, en el qual se supone que la generatriz de la superficie sea perpendicular á uno de los planos de proyeccion, por exemplo, al plano horizontal, y que el plano secante sea perpendicular al otro.

Sea A (*fig.* 27) la proyeccion horizontal de la recta á la qual la generatriz de la superficie cilíndrica debe ser siempre paralela, *aa''* su proyeccion vertical, BCDE la traza dada de la superficie cilíndrica, cuya traza será la proyeccion horizontal de la superficie indefinida, y por consiguiente la de la curva de interseccion; sea *fg* la proyeccion vertical dada del plano secante; proyeccion que lo será tambien de la interseccion pedida, y FG la traza horizontal del mismo plano: es evidente, que si se tira á la curva BCDE, perpendicularmente á LM, las tangentes indefinidas E*e''*, C*c''*, las rectas *ee''*, *cc''*, serán las proyecciones verticales de la generatriz en sus posiciones extremas, y que los puntos *e'*, *c'*, en que cortarán la proyeccion *fg* del plano secante, determinarán sobre *fg* la proyeccion vertical de la interseccion pedida.

Sentado esto, si por un punto tomado arbitrariamente sobre la interseccion (punto cuya proyeccion horizontal será un punto H, tomado á voluntad sobre la curva BCDE, y cuya proyeccion vertical se tendrá proyectando el punto H en *i* sobre *fg*) se quiere tirar la tangente á esta interseccion, es claro que esta tangente estará comprehendida en el plano secante, y que su proyeccion vertical será la recta *fg*; tambien es claro que estará comprehendida en el plano vertical tangente á la superficie cilíndrica, y que su proyeccion horizontal, que será la misma que la del plano tangente, será la recta FHN tangente en H á la curva dada BCDE: así todo está determinado respecto á la interseccion pedida.

60 Supongamos ahora que se trate de construir esta interseccion tal qual ella exîste en su plano, y de tirarle una tangente por uno de sus puntos tomados á voluntad. Si el plano de proyeccion vertical está muy distante de la curva BCDE, se podrá concebir otro plano vertical que le sea paralelo, que pase por dentro de la curva BCDE, y cuya proyeccion horizontal sea la recta EC paralela á LM. Este plano vertical cortará al plano secante en una recta paralela á su proyeccion *fg*, y al rededor de la qual, como charnela, supondrémos que el plano secante gira para ponerse vertical, y presentar de frente la curva pedida. Sentado esto, por tantos puntos H como se quieran, tomados arbitrariamente sobre BCDE, se concebirán planos verticales perpendiculares al plano vertical de proyeccion, y de los quales se tendrán al mismo tiempo las proyecciones horizontales y las verticales, tirando por todos los puntos H rectas HJK*ii'* perpendiculares á LM. Cada uno de estos planos cortará el plano secante en una recta horizontal perpendicular á la charnela, y cuya proyeccion vertical será el punto de concurso *i'* de dos rectas *fg*, *ii'*. Ademas, en cada plano esta recta horizontal encontrará la charnela en un punto cuya proyeccion horizontal será la interseccion J de las dos rectas EC, HJK*ii'*, y encontrará la curva pedida en puntos cuyas proyecciones horizontales serán las intersecciones H, K de la recta HJK*ii'* con la curva BCDE. En fin, esta recta y todas sus partes serán iguales á sus proyecciones horizontales. Quando el plano secante gira al rededor de la charnela para ponerse verti-

cal, todas estas rectas, que antes eran horizontales, continuan siempre en ser perpendiculares á la charnela, y no mudan de magnitud. Luego si por todos los puntos *i'* se tiran á *fg* perpendiculares indefinidas *hk*, y sobre estas perpendiculares se traslada JH de *i'* á *h*, y JK de *i'* á *k*, se tendrán tantos puntos *h*, *k* quantos se quieran, por los quales se hará pasar la curva pedida *e'kc'h*.

61 Construida la curva en su plano, si se trata de tirarle una tangente por uno de sus puntos *h*, tomado arbitrariamente, se tendrá la proyeccion vertical de este punto baxando del punto *h* sobre *fg* la perpendicular *hi'* y su proyeccion horizontal proyectando *i'* en H sobre la curva BCDE: se tendrá la proyeccion horizontal de la tangente que se pide tirando la recta FN tangente en H á la curva BCDE; y bastará referir sobre el plano de la curva un punto qualquiera de la tangente, por exemplo, aquel que está proyectado sobre el punto N tomado arbitrariamente, y cuya proyeccion vertical está sobre *fg* en *a'*. Raciocinando para este punto como para todo otro punto del plano secante, es claro que si por el punto *a'* se tira á *fg* la perpendicular *a'n*, y que si sobre esta recta se lleva desde *a* hasta *n* la distancia NA del punto N á la recta EC, el punto *n* será el segundo punto de la tangente. Luego tirando la recta *hn*, se tendrá la tangente pedida.

62 Qualquiera que sea la curva dada BCDE, se ve que la interseccion *e'kc'h* goza de la propiedad que para qualquiera de sus puntos la subtangente *a'n* es igual á la subtangente AN de la primera. Esta propiedad, que es muy conocida para el círculo y la elipse quando estas dos curvas tienen un exe comun, no tiene lugar respecto á ellas sino porque son las intersecciones de una misma superficie cilíndrica con dos planos diferentes.

63 En fin, puede suceder que se necesite trazar sobre una superficie cilíndrica desarrollada el efecto de la seccion hecha por un plano secante. Para esto, despues de haber desarrollado la curva BCDE, con todas sus divisiones, sobre una recta QR; si por todas las divisiones de R se le tiran perpendiculares indefinidas, se tendrá el desarrollo de la superficie, las trazas de las diferentes posiciones de la recta generatriz, y no quedará mas que llevar sobre estas perpendiculares las partes de las generatrices correspondientes, comprehendidas entre la seccion perpendicular BCDE, y la seccion hecha por el plano secante. Estas partes de las generatrices son iguales á sus proyecciones verticales, y estas proyecciones se terminan todas por una parte en la recta LM, y por la otra en *fg*. Luego, si el punto H, por exemplo, cae en S sobre la recta RQ, llevando *ii'* sobre la perpendicular que pasa por el

punto S, de S á T, el punto T estará sobre la superficie desarrollada, y será aquel en que la generatriz que pasa por el punto H es cortada por el plano secante. La curva XTYZ que pasará por todos los puntos determinados de esta manera será la curva pedida.

64 Es evidente que si se prolonga la tangente en el punto H hasta que encuentre la traza horizontal GF del plano secante en algun punto F, y que si se lleva HF sobre RQ, desde S hasta U, la recta TU será tangente á la curva; pues quando la superficie cilíndrica se desarrolla, sus elementos no varian de inclinacion respecto al plano horizontal.

Segundo caso, en el qual se supone la superficie cilíndrica y el plano secante, colocados de un modo qualquiera repecto á los dos planos de proyeccion.

65 *Solucion.* Sean (*fig.* 28) AA′ y *aa′* las dos proyecciones de la recta, á la qual la generatriz debe ser paralela, CEDF la traza dada de la superficie cilíndrica, y HG, *hb* las trazas del plano secante.

Se imaginará una serie de planos paralelos á la generatriz de la superficie cilíndrica, que serán todos perpendiculares á uno de los planos de proyeccion, por exemplo, al plano horizontal; cada uno de estos planos será proyectado segun una recta OKE paralela á AA′, y cortará la superficie en rectas, que serán posiciones de la generatriz, y que encontrarán el plano horizontal en los puntos de interseccion E, F, de la recta OKE, con la curva CEDF. Luego si se proyectan los puntos E, F sobre LM en *e*, *f*, y si por estos últimos puntos se tiran á la recta *aa′* las paralelas *ee′*, *ff′*, se tendrán las proyecciones verticales de las intersecciones de las superficies con cada uno de los planos paralelos á la generatriz.

Estos mismos planos cortarán al plano secante en rectas que serán paralelas entre sí, que tendrán todas sus trazas horizontales sobre los diferentes puntos O de la recta HG, y cuyas proyecciones verticales serán tambien paralelas entre sí. Para tener estas proyecciones es menester primero buscar la direccion de una de ellas, de aquella, por exemplo, que corresponde al plano vertical tirado por AA′. Para esto, si se prolonga AA′ hasta que encuentre de una parte la traza del plano secante en un punto N, y de la otra la recta LM en un punto B, y si se proyecta el punto B en *b* sobre *hb*, los dos puntos N y *b* serán sobre los dos planos de proyeccion, las trazas de la interseccion del plano secante con el plano vertical. Luego si se proyecta el punto N en *n* sobre LM, y si se tira la recta *nb*, se tendrá la proyeccion vertical de esta interseccion. Luego, proyectando sobre LM todos los puntos O, en los quales la traza GH es cortada por las proyecciones de los planos verticales, lo que dará una serie de puntos *o*, y tirando por estos últimos las paralelas á *nb*, *oik*, se tendrán las proyecciones verticales de las intersecciones del plano secante por la serie de planos verticales. Luego, en fin, los puntos de concurso *i*, *k* de cada recta *oik* con las proyecciones *ee'*, *ff'* de las secciones hechas en la superficie cilíndrica por el plano vertical correspondiente, estarán sobre la proyeccion vertical de la interseccion pedida; y la curva, que pase por todos los puntos *i*, *k* determinados así, será esta proyeccion. Si se proyectan los puntos *i*, *k* en J, K sobre la proyeccion OKE del plano vertical correspondiente, se tendrá la proyeccion horizontal de los mismos puntos, y la curva KJP, que pase por todos los puntos determinados de este modo, será la proyeccion horizontal de la interseccion.

66 Para tener las tangentes de estas dos proyecciones en los puntos J, *i* es menester acordarse que estas tangentes son las proyecciones de la tangente á la interseccion. Esta última tangente, hallándose al mismo tiempo en el plano secante, y en el plano tangente á la superficie cilíndrica, debe tener su traza horizontal en la interseccion de las trazas horizontales de estos dos planos: ademas, la traza del plano tangente es la tangente en F á la curva CEDF. Luego si se tira esta tangente, y si despues de haberla prolongado hasta que encuentre la traza del plano secante en un punto G se tira la recta GJ, esta recta tocará en el punto J la proyeccion horizontal de la interseccion. En fin, proyectando el punto G sobre LM en *g*, y tirando la recta *gi*, se tendrá la tangente en *i* de la proyeccion vertical de la misma curva.

67 Si fuese menester construir la curva de la interseccion tal qual exîste en su plano, se concebirá que el plano secante gira al rededor de su traza horizontal HG como charnela, para aplicarse sobre el plano horizontal. En este movimiento cada uno de los puntos de la seccion, aquel por exemplo que se halla proyectado en J, describirá un arco de círculo cuyo plano será vertical, perpendicular á HG, y cuya proyeccion indefinida se tendrá tirando por el punto J una recta RJS perpendicular á HG: luego, quando el plano esté doblado, el punto de la seccion caerá en alguno de los puntos de esta recta. Queda que hallar la distancia de este punto á la charnela. Como la proyeccion horizontal de esta distancia es JR, y la diferencia de las alturas de sus extremos, es la vertical *is*. Si se lleva JR sobre LM de *s* á *r*, la hipotenusa *ri* será

esta distancia. Luego, llevando *ri* sobre RJ de R á S, el punto S será uno de los puntos de la interseccion considerada en su plano doblado sobre el plano horizontal; y la curva STUV, tirada por todos los puntos S construidos de este modo, será ella misma la interseccion.

68 Para tener la tangente de esta curva en el punto S basta observar que, durante el movimiento del plano secante, la tangente pasa siempre por el punto G de la charnela: luego, si se tira la recta SG, se tendrá la tangente pedida.

69 *Segunda qüestion.* Construir la interseccion de una superficie cónica de una base qualquiera dada, con un plano dado de posicion.

Fig. 29. *Solucion.* Supondrémos, lo que siempre es posible, que el plano vertical de proyeccion esté colocado perpendicularmente al plano secante.

Sean A y a' (*fig. 29*) las proyecciones del vértice del cono ó del centro de la superficie cónica, BCDE la traza de esta superficie sobre el plano horizontal, *fg* la proyeccion vertical del plano secante, y G*f* su proyeccion horizontal. Se imaginará por el vértice del cono una serie de planos perpendiculares al plano vertical de proyeccion: las proyecciones verticales de estos planos serán las rectas $a'c$ tiradas por la proyeccion del vértice; y sus trazas horizontales serán las rectas *c*C perpendiculares á LM, que cortarán la traza de la superficie cónica en alguno de los puntos C, C': estos planos cortarán la superficie en rectas, cuyas proyecciones verticales serán las rectas $a'c$, y cuyas proyecciones horizontales se tendrán tirando al punto A las rectas CA, C'A: los mismos planos cortarán tambien al plano secante en rectas, que serán perpendiculares al plano vertical. Las proyecciones de estas rectas serán los puntos *h* de contacto de *fg*, con las rectas $a'c$, y se tendrán sus proyecciones horizontales baxando de los puntos *h* sobre LM las perpendiculares indefinidas *h*H. Hecho esto, las rectas H*h* cortarán las rectas correspondientes CA, C'A en puntos H, H', que serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos de la interseccion pedida; y la curva PHQH', que pasará por todos los puntos construidos de este modo, será la proyeccion de la interseccion.

70 Para tirar á esta curva una tangente por un punto H tomado á voluntad sobre ella, basta buscar sobre el plano horizontal la traza de la tangente de la interseccion en el punto que corresponde al punto H. Como esta traza debe estar sobre la del plano secante, y por consiguiente sobre G*f*; debe estar tambien so-

bre la del plano que toca la superficie cónica en la recta cuya proyeccion es AH: ademas, si se prolonga AH hasta que encuentre la curva BCDE en un punto qualquiera C, la tangente CF de esta curva en el punto C será la traza horizontal del plano tangente. Luego el punto F de contacto de las dos trazas *f*G, GF estará sobre la tangente al punto H de la curva PHQH'.

71 Si es menester construir la interseccion considerada en su plano, se podrá concebir indefinidamente, ó que el plano secante gira al rededor de G*f* como charnela, para doblarse sobre el plano horizontal, y construir la curva en la posicion que habrá tomado entonces, ó que gira al rededor de su proyeccion vertical *fg* para aplicarse sobre el plano vertical: esta última hipótesis es la que vamos á seguir.

Todas las horizontales en que el plano secante ha cortado al sistema de los planos tirados por el vértice, y que son perpendiculares á *fg*, no mudan de tamaño en el movimiento del plano secante, y no cesan de ser perpendiculares á *fg*: luego, si por todos los puntos *h* se tiran á *fg* perpendiculares indefinidas, y si se lleva sobre ellas las horizontales correspondientes KH, KH', desde *h* hasta N y N', los puntos N y N' serán puntos de la seccion; y la curva RNSN', trazada por todos los puntos construidos de este modo, será la interseccion considerada en su plano.

72 De lo dicho resulta, que para tirar á esta curva una tangente en un punto N, tomado sobre ella arbitrariamente, es menester baxar del punto N sobre *fg* la perpendicular N*h*, tirar la recta *a'h* hasta que encuentre LM en un punto *c*, proyectar este último punto en C sobre la curva BCDE, tirar á esta curva la tangente en C, que cortará la traza G*f* en un punto qualquiera F, y llevar F*f* perpendicularmente á *fg* desde *f* hasta O. La recta ON será la tangente pedida.

En quanto al modo de construir el desarrollo de la superficie cónica de base qualquiera, y de trazar sobre este desenvolvimiento el efecto de la interseccion por el plano secante, lo expondrémos dentro de poco despues de haber hablado de la interseccion de la superficie cónica por la de una esfera cuyo centro estaria en el vértice del cono.

73 *Tercera qüestion.* Construir la interseccion de dos superficies cónicas de bases circulares, y cuyos exes son paralelos entre sí.

Solucion. No repetirémos aquí sobre la figura 26 todo lo que ya hemos dicho exponiendo el método general, al qual esta figura sirvió de modelo; observarémos solamente, que en el caso de que se trata aquí, igualmente que en el de dos superficies qualesquiera de revolucion, las secciones hechas en las dos superficies por los planos horizontales son círculos; pero entrarémos en algunos detalles respecto á las tangentes, de que aun no hemos tenido ocasion de hablar.

74 Para hallar la tangente al punto D (*fig.* 26) de la proyeccion horizontal de la interseccion, tendrémos presente, que debe ser la proyeccion de la tangente de la interseccion de las dos superficies en el punto correspondiente á D, y que basta para determinarla el hallar el punto S, que es la traza de la tangente de la interseccion sobre el plano horizontal. Esta última tangente se halla en los dos planos que tocan las superficies cónicas en el punto de interseccion; por consiguiente, si se determinan las trazas horizontales R*r*, Q*q* de estos dos planos tangentes, el punto en que ellas se encuentran será el punto S. Pero el plano tangente á la primera superficie la toca en una recta que pasa por el vértice, y cuya proyeccion horizontal se tendrá tirando la recta indefinida AD. Ademas, si se prolonga AD hasta que encuentre la traza horizontal circular TUV de la superficie en un punto Q, este punto será uno de los de la línea de contacto de la superficie y del plano; por consiguiente, la traza horizontal del plano será tangente en Q al círculo TQUV: tírese pues esta tangente Q*q*. Igualmente si se prolonga el radio BD hasta que encuentre en R la traza horizontal circular RXYZ de la segunda superficie, y si se tira á este círculo la tangente en R, esta recta R*r* será la traza horizontal del plano tangente á la segunda superficie. Luego, si por el punto S de interseccion de las dos tangentes Q*q*, R*r* se tira la recta SD, se tendrá la tangente al punto D de la proyeccion horizontal de la interseccion.

En quanto á la tangente al punto *d* de la proyeccion vertical es claro que se tendrá proyectando el punto S en *s*, y tirando despues la recta *sd*, que será esta tangente.

75 Puede suceder que se necesite construir sobre el desarrollo de una de las superficies cónicas, y aun tal vez sobre cada una de ellas, el efecto de su interseccion comun; lo que seria necesario, por exemplo, si fuese menester construir los conos con substancias flexîbles, como con hojas de metal: en este caso se hará con cada uno de los conos lo que vamos á indicar con uno de ellos.

Observarémos primero, que quando una superficie cónica se desarrolla para pasar á ser plana, las líneas rectas que se hallan sobre su superficie no mudan de forma ni de magnitud, porque cada una de ellas es necesariamente la charnela al rededor de la qual se efectua el desarrollo: así todos los puntos de la superficie quedan siempre á la misma distancia del vértice. Ademas, quando, como en este caso, la superficie cónica es recta y circular, todos los puntos de la traza horizontal circular estan á la misma distancia del vértice; tambien deben de hallarse sobre el desarrollo á la misma distancia de dicho punto, y por consiguiente sobre un arco de círculo, cuyo radio es igual á la distancia constante del vértice á la traza circular. Luego, si despues de haber tomado arbitrariamente un punto para representar el vértice del desarrollo, se describe desde este punto, como centro, y con un radio igual á *a*C, un arco de círculo indefinido, este arco será tambien indefinidamente el desarrollo de la traza horizontal de la superficie. Luego, si partiendo de un punto T de la traza, por el qual se quiere empezar la operacion, se lleva el arco de círculo TQ sobre el arco que acaba de describirse, se determinará la posicion del punto Q sobre el desarrollo, y la recta indefinida, tirada por este punto al centro, será la posicion que tendrá la recta de la superficie proyectada en AQ, y sobre la qual deberá hallarse el punto D, *d* de la seccion referida. Para construir este punto no se trata mas que de hallar su distancia al vértice, y llevarla sobre la recta indefinida, partiendo del centro del desarrollo. Para esto, por el punto *d* en la proyeccion vertical se tirará la horizontal *dk* hasta que corte la recta *a*C del cono en un punto *k*; y la recta *ak* será esta distancia. Construyendo del mismo modo sucesivamente todos los otros puntos de la interseccion, y haciendo pasar por todos estos puntos una curva, se tendrá la interseccion de las dos superficies referida al desarrollo de la primera: se hará lo mismo con la segunda superficie.

76 *Quarta qüestion.* Construir la interseccion de dos superficies cónicas, sean las que quieran sus bases.

Solucion. Sean A, *a* (*fig.* 30) las proyecciones del vértice de la primera superficie, CGDG′ su traza dada sobre el plano horizontal, B, *b* las proyecciones del vértice de la segunda; y EHFH′ su traza sobre el plano horizontal. Se imaginará una recta por los dos vértices, cuyas proyecciones se tendrán tirando las dos rectas indefinidas AB, *ab*, y cuya traza I sobre el plano horizontal se construirá fácilmente. Por esta recta se concebirá una serie de planos, que cortarán cada uno las dos superficies cónicas en el sistema de muchas líneas rectas, de las quales las que esten en el mismo plano determinarán por medio de sus intersecciones otros tantos puntos de la interseccion de las dos superficies. Las trazas horizontales de todos los planos de esta serie pasarán necesariamente por el punto I; y como la posicion de estos planos es arbitraria, se podrán tomar arbitrariamente sus trazas, tirando por el punto I tantas rectas IK como se quieran, para cada una de las quales se repetirá la misma operacion que vamos á describir para solamente una de ellas.

La traza KI de cada uno de los planos de la serie cortará la traza horizontal de la primera superficie cónica en los puntos G, G′, que serán tambien las trazas horizontales de las líneas rectas, segun las quales el plano corta la superficie cónica: así AG, AG′ serán las proyecciones horizontales indefinidas de estas rectas, y se tendrán sus proyecciones verticales proyectando G, G′ en *g*, *g′*, y tirando las rectas indefinidas *ag*, *ag′*. Igualmente la traza KI del mismo plano de la serie cortará la traza horizontal de la segunda superficie cónica en los puntos H, H′, por los quales si se tira indefinidamente BH, BH′, se tendrán las proyecciones horizontales de las rectas, segun las quales el mismo plano de la serie corta la segunda superficie; y se tendrán sus proyecciones verticales proyectando H, H′ en *h*, *h′*, y tirando las rectas indefinidas *bh*, *bh′*.

Hecho esto, para el mismo plano, cuya traza es KI, se tendrá sobre la proyeccion horizontal un cierto número de rectas AG, AG′, BH, BH′; y los puntos P, Q, R, S, en que aquellas que pertenecen á una de las superficies encuentran las que pertenecen á la otra, serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos de la interseccion de las dos superficies. Obrando sucesivamente del mismo modo para otras líneas KI, se hallarán nuevas series de puntos PQRS; y haciendo despues pasar por todos los puntos P el primer ramo de curva, por todos los puntos Q el segundo, por todos los puntos R el tercero &c., se tendrá la proyeccion horizontal de la interseccion pedida.

Igualmente, para el mismo plano, cuya traza es KI, se tendrá sobre la proyeccion vertical un cierto número de rectas *ag*, *ag′*, *bh*, *bh′*, cuyos puntos de reunion serán las proyecciones verticales de otros tantos puntos de la interseccion.

Es menester observar aquí que no es necesario construir las dos proyecciones independientemente la una de la otra, y que construido un punto de la una, se puede determinar el que le corresponde sobre la otra, proyectándolo sobre una de las rectas que debe contenerlo; lo qual proporciona los medios de verificar las operaciones, y de evitar en ciertos casos las intersecciones de las rectas que se cortarian formando ángulos muy obtusos.

77 Para hallar las tangentes de la proyeccion horizontal, por exemplo la que la toca en el punto P, es menester construir la

traza horizontal T de la tangente de la interseccion al punto que corresponde á P. Como esta tangente es la interseccion de los dos planos que tocan las superficies cónicas en este punto, su traza se hallará por consiguiente en el concurso de las trazas horizontales de estos dos planos tangentes. Ademas, AG′P es la proyeccion de la recta de contacto del plano que toca la primera superficie; así la traza de este primer plano será la tangente de la curva CGDG′ en el punto G′: sea G′TV esta tangente. Igualmente BH′P es la proyeccion horizontal de la recta de contacto del plano que toca la segunda superficie; así la proyeccion horizontal del segundo plano tangente será la tangente al punto H′ de la curva EHFH′: sea H′TU esta tangente. Las dos tangentes G′V, H′U se cortarán pues en un punto T, por el qual si se tira la recta TP, se tendrá la tangente al punto P que se pedia.

Haciendo el mismo raciocinio para los otros puntos Q, R, S, se hallará: 1.º que la tangente en Q debe pasar por el punto de reunion de las tangentes en G′ y en H: 2.º que la tangente en R debe pasar por el punto de concurso de las tangentes en H y en G: 3.º que la tangente en S debe pasar por el punto de concurso de las tangentes en G y en H′.

En quanto á las tangentes de la proyeccion vertical no tienen ninguna dificultad, quando estan determinadas las de la proyeccion horizontal; pues proyectando las trazas horizontales de las tangentes de la interseccion, se tienen los puntos por los quales deben pasar.

78 *Quinta qüestion.* Construir la interseccion de una superficie cónica, cuya base sea qualquiera, y la de una esfera.

Supondrémos aquí que las dos superficies son concéntricas, esto es, que el vértice del cono se halla en el centro de la esfera, porque tendrémos necesidad de este caso particular para la siguiente qüestion.

Solucion. Sean A, *a* (*fig. 31*) las proyecciones del centro comun de las dos superficies, BCDE la traza horizontal dada de la superficie cónica, *am* el radio de la esfera, y el círculo *lg′f′m* la proyeccion vertical de la esfera. Se concebirá por el centro comun de las dos superficies una serie de planos, que ademas se podrán suponer todos perpendiculares á uno de los dos planos de proyeccion. En la fig. 31 los hemos supuesto verticales. Cada uno de estos planos cortará á la superficie cónica en un sistema de líneas rectas, y á la superficie de la esfera en la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos; y para cada plano las intersecciones de estas rectas con la circunferencia del círculo determinarán puntos de la interseccion pedida; tírense pues por el punto A tantas rectas indefinidas CAE como se quieran, que serán las proyecciones horizontales de otros tantos planos verticales de la serie, y al mismo tiempo las de las líneas, segun las quales estos planos cortan las dos superficies. Cada recta CAE cortará la traza horizontal BCDE de la superficie cónica en los puntos C, E, que serán las trazas horizontales de las secciones hechas en esta superficie por el plano correspondiente; y si despues de haber proyectado los puntos C, E sobre LM en *c*, *e* se tiran las rectas *ac*, *ae*, se tendrán las proyecciones verticales de las mismas secciones. Trátase ahora de hallar las intersecciones de estas secciones con las de la esfera por el mismo plano.

Para esto, despues de haber tirado por el punto A la recta GAF paralela á LM, se concebirá que el plano vertical tirado por CE gira al rededor de la vertical levantada por el punto A, y proyectada en $a'a$, como charnela, hasta que llegue á ser paralelo al plano vertical de proyeccion, y que ademas lleve consigo las secciones que ha hecho en las dos superficies. En este movimiento los puntos C, E describirán al rededor del punto A, como centro, arcos de círculo CG, EF, y vendrán á aplicarse sobre G y F; y si se proyectan estos últimos puntos sobre LM, en *g*, *f*, las rectas *ag*, *af* serán las proyecciones verticales de las secciones hechas en la superficie cónica, consideradas en la nueva posicion que han tomado en virtud del movimiento del plano. La seccion hecha en la superficie de la esfera, considerada igualmente en la nueva posicion, tendrá por proyeccion vertical la circunferencia $lg'f'm$. Luego los puntos de concurso g', f' de esta circunferencia con las rectas *ag*, *af* serán las proyecciones de los puntos de la interseccion pedida, considerados tambien en la nueva posicion del plano.

Ahora, para tener las proyecciones de los mismos puntos, considerados en su posicion natural, es menester suponer que el plano vertical de la serie vuelve á su primera posicion. En este movimiento todos sus puntos, y por consiguiente los de la interseccion que contiene, describirán arcos de círculo horizontales al rededor de la vertical levantada por el punto A como exe, y cuyas proyecciones verticales serán rectas horizontales. Luego, si por los puntos f', g' se tiran las horizontales $f'h$, $g'i$, se deberán hallar en ellas las proyecciones verticales de los puntos de la interseccion; pero estas proyecciones deben tambien hallarse sobre las rectas respectivas *ac*, *ae*: luego se hallarán en los puntos de interseccion *i*, *h* de estas últimas rectas con las horizontales $g'i$, $f'h$.

Así la curva *khni*, trazada por todos los puntos construidos del mismo modo para toda otra recta que CE, será la proyeccion vertical de la interseccion pedida.

Si se proyectan los puntos *i*, *h* sobre CE en J, H, se tendrán las proyecciones horizontales de los mismos puntos de la interseccion; y la curva KHNJ, tirada por todos los puntos J, H, construidos del mismo modo para toda otra recta que CE, será la proyeccion horizontal de la interseccion.

79 Para hallar la tangente al punto J de la proyeccion horizontal es menester construir la traza horizontal P de la tangente al punto correspondiente de la interseccion. Esta traza debe hallarse en el concurso de las trazas de los planos tangentes á las dos superficies en el punto de la interseccion que corresponde al punto J. Pero es evidente, que si por el punto C se tira la tangente CP á la curva BCDE, se tendrá la traza del plano tangente á la superficie cónica. En quanto á la del plano tangente á la superficie de la esfera se hará como lo hemos visto para las superficies de revolucion, esto es, tirando por el punto g' al círculo $lf'g'm$ la tangente $g'o$ prolongada hasta la recta LM en *o*, y llevando despues $a'o$ sobre CE de A á O, y tirando por el punto O la recta OP perpendicular á CE. Luego las dos trazas CP, OP se cortarán en un punto P, por el qual, si se tira la recta JP, se tendrá la tangente en el punto J.

En fin, es evidente que se tendrá la tangente en el punto *i* de la proyeccion vertical de la interseccion, proyectando el punto P sobre LM en *p*, y tirando luego la recta *ip*, que será la tangente pedida.

80 Si la esfera y la superficie cónica no fuesen concéntricas, seria necesario concebir por sus dos centros una línea recta, y elegir la serie de planos secantes que pasasen por esta recta. Cada uno de estos planos cortaria la superficie cónica en rectas, y la de la esfera en uno de sus círculos máxîmos, como en el caso precedente, lo que da igualmente una construccion simple; pero entonces seria conveniente colocar el plano vertical de proyeccion paralelamente á la recta tirada por los dos centros, á fin que en el movimiento que se hace hacer á cada plano secante para hacerlo paralelo al plano vertical de proyeccion los dos centros sean inmobles, y no muden de proyecciones; lo que simplifica las construcciones.

81 *Sexta qüestion.* Construir el desarrollo de una superficie cónica de qualquiera base, y trazar sobre esta superficie desarrollada de este modo una seccion de la qual se tienen las dos proyecciones.

Solucion. Se concebirá la superficie de una esfera de un radio tomado á voluntad, y cuyo centro esté colocado en el vértice del cono, y se construirá, como lo hemos hecho en la qüestion precedente, las proyecciones de la interseccion de estas dos superficies. Hecho esto, es evidente que todos los puntos de la interseccion esférica, estando á la misma distancia del vértice, deben tambien hallarse sobre la superficie desarrollada á la misma distancia del vértice, y por consiguiente sobre un arco de círculo descrito desde el vértice como centro, y con un radio igual al de la esfera. Así, suponiendo que el punto R (*fig. 33*) sea el vértice de la superficie desarrollada, si desde este punto como centro, y con un radio igual á *am* (*fig. 31*) se describe un arco de círculo indefinido STU, sobre este arco será sobre el qual vendrán á aplicarse todos los puntos de la interseccion esférica, de modo que las partes de este arco serán respectivamente iguales á las partes correspondientes de la interseccion esférica. Trátase pues actualmente, despues de haber tomado á voluntad sobre esta interseccion un punto por orígen, por exemplo el que está proyectado en N, *n* (*fig. 31*) y un punto S (*fig. 33*) por su correspondiente sobre la superficie desarrollada, de desarrollar los diferentes arcos de la interseccion esférica, y de llevarlos sucesivamente sobre el arco de círculo STU desde S hasta los puntos T. Para esto, la curva esférica, siendo de doble curvatura, es menester hacer que desaparezcan sucesivamente sus dos curvaturas, sin alterar su tamaño, del modo siguiente.

Proyectada la interseccion esférica sobre el plano horizontal en NJKH (*fig. 31*), se la puede mirar como trazada sobre la superficie de un cilindro vertical, cuya base seria NJKH; por consiguiente, se podrá desarrollar esta superficie, como lo hemos indicado (*fig. 27*), y trasladar sobre esta superficie cilíndrica desarrollada la interseccion esférica, desarrollando el arco NJ (*fig. 31*) en N'J' (*fig. 32*), y llevando la vertical *ii'* (*fig. 31*) perpendicularmente á N'N' (*fig. 32*) de J' á J''. La curva N''J''K''N'', que pasará por todos los puntos J'' determinados de este modo, será la interseccion esférica privada de su curvatura horizontal, sin haber mudado de longitud. Se tendrá la tangente al punto K'' de esta curva, tomando JP (*fig. 31*), y llevándola sobre N'N' (*fig. 32*) de J' á P', y tirando la recta J''P'.

Ahora se desarrollará la curva N''J''K''H''N'' para envolverla sobre el arco STU (*fig. 33*): por exemplo, se llevará el arco N''J'' de S á T, y el punto T será, en la superficie cónica desenvuelta, el punto sobre que se aplica el de la interseccion esférica, cuyas proyecciones son J, *i* (*fig. 31*). Luego, si se tira la recta RT, se tendrá sobre el desarrollo de la superficie la generatriz cuya proyeccion horizontal es AC (*fig. 31*): en fin, si se halla sobre esta generatriz un punto que sea menester referir á la superficie desarrollada, no se tratará mas que de tomar (*fig. 31*) la distancia de este punto al vértice de la superficie cónica, y de llevarla (*fig. 33*) sobre RT de R á V; y el punto V será, en la superficie desarrollada, el que consideramos.

82 *Séptima qüestion.* Construir la interseccion de dos superficies cilíndricas, cuyas bases sean las que se quieran.

Solucion. Quando solo se trata de considerar las intersecciones de dos superficies cilíndricas, y sobre todo quando las bases de estas superficies son circulares, conviene elegir los planos de proyeccion de modo, que el uno de ellos sea paralelo á las generatrices de los dos cilindros: de este modo la interseccion se construye sin emplear otras curvas que las dadas. Pero quando es menester considerar al mismo tiempo las intersecciones de estas superficies con otras, no se gana nada en mudar de planos de proyeccion; y aun es mas fácil el representarse los objetos refiriéndolos todos á los mismos planos. Supondrémos pues las generatrices de las dos superficies colocadas de un modo qualquiera respecto á los planos de proyeccion.

Sean pues TFUF′, XGVG (*fig. 34*) las trazas horizontales dadas de las dos superficies cilíndricas, AB, *ab* las proyecciones dadas de la recta á la qual debe ser paralela la generatriz de la primera, CD, *cd* las de la recta á la qual debe ser paralela la generatriz de la segunda. Se concebirá una serie de planos paralelos á las dos generatrices. Estos planos cortarán las dos superficies en líneas rectas; y las intersecciones de las secciones hechas en la primera superficie, por las secciones hechas en la segunda, determinarán los puntos de la seccion pedida.

Así, despues de haber construido, como en la fig. 15, la traza horizontal AE de un plano tirado por la primera recta dada paralelamente á la segunda, se tirarán tantas rectas FG′ como se quieran, paralelamente á esta traza, y se mirarán estas paralelas como las trazas de los planos de la serie que se hayan tirado. Cada recta FG′ cortará la traza de la primera superficie en los puntos F, F′, y la de la segunda en otros puntos G, G′, por los quales se tirarán las paralelas FH, F′H′..... GJ, G′J′ á las proyecciones de las generatrices respectivas; y los puntos de contacto P, Q, R, S de estas rectas serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos de la seccion de las dos superficies. Executando lo mismo con la serie de rectas FG', se hallará una serie de sistemas de puntos P, Q, R, S, y la curva que pase por todos los puntos hallados de este modo será la proyeccion horizontal de la interseccion.

Para tener la proyeccion vertical se proyectarán sobre LM los puntos F, F'..... G, G'..... en *f*, *f'*..... *g*, *g'*....., y por estos últimos puntos se tirarán á las proyecciones de las generatrices respectivas las paralelas *fh*, *f'h'*..... *gi*, *g'i'*..... que, por sus intersecciones, determinarán las proyecciones verticales *p*, *q*, *r*, *s* de los puntos de la seccion. Haciendo lo mismo con todas las otras rectas FG', se tendrán nuevos puntos *p*, *q*, *r*, *s*; y la curva que pase por todos estos puntos será la proyeccion vertical de la seccion de las dos superficies.

Para tener las tangentes de estas curvas en los puntos P y *p* se construirá la traza horizontal F'Y del plano tangente en este punto á la primera superficie cilíndrica; luego la traza G'Y del plano tangente en este mismo punto á la segunda; y la recta tirada desde el punto P al punto Y de interseccion de estas dos trazas será la tangente en P. En fin, proyectando Y sobre LM en *y*, y tirando la recta *py*, se tendrá la tangente al punto *p* de la proyeccion vertical.

83 *Octava qüestion.* Construir la interseccion de dos superficies de revolucion, cuyos exes estan en el mismo plano.

Solucion. Se dispondrán los planos de proyeccion, de modo que uno de ellos sea perpendicular al exe de una de las superficies, y que el otro sea paralelo á los dos exes. Sentado esto, sean A (*fig.* 35) la proyeccion horizontal del exe de la primera superficie, *aa'* su proyeccion vertical, y *cde* la generatriz dada de esta superficie. Sea AB, paralela á LM, la proyeccion horizontal del exe de la segunda superficie, *a'b* su proyeccion vertical, de modo que A y *a'* sean las proyecciones del punto de interseccion de los dos exes; y sea *fgh* la generatriz dada de esta segunda superficie. Se concebirá una serie de superficies esféricas, cuyo centro comun se halle en el punto de concurso de los dos exes. Para cada una de las superficies de esta serie se construirá la proyeccion *iknopq* del círculo máxîmo paralelo al plano vertical de proyeccion; y estas proyecciones, que serán arcos de círculo descritos del punto *a'* como centro, y con radios arbitrarios, cortarán las dos generatrices en los puntos *k*, *p*.

Sentado esto, cada superficie esférica cortará la primera superficie, en la circunferencia de un círculo, cuyo plano será perpendicular al exe *aa'*, cuya proyeccion vertical se tendrá tirando la horizontal *ko*, y su proyeccion horizontal describiendo desde el punto A como centro, y con un diámetro igual á *ko*, la circunferencia de círculo KROR′. Del mismo modo cada superficie esférica de la serie cortará la segunda superficie de revolucion en la circunferencia de un círculo, cuyo plano será perpendicular al plano vertical de proyeccion, y cuya proyeccion vertical se tendrá tirando por el punto *p* una recta *pn* perpendicular á *a′b*.

Si el punto *r*, en que se cortan las dos rectas *ko*, *pn*, está mas inmediato á los dos exes respectivos, que no los puntos *k*, *p*, es evidente que las dos circunferencias se cortarán en dos puntos, de los quales *r* será la proyeccion comun; y la curva trazada por todos los puntos *r* construidos del mismo modo será la proyeccion vertical de la interseccion de las dos superficies. Proyectando el punto *r* sobre la circunferencia del círculo KROR′ en R y R′, se tendrán las proyecciones horizontales de los dos puntos de interseccion de las circunferencias de los círculos que se hallan sobre la misma esfera; y la curva trazada por todos los puntos R, R′ construidos del mismo modo, será la proyeccion horizontal de la interseccion pedida.

Estos exemplos deben bastar para hacer conocer de qué modo es menester emplear el método de construir las intersecciones de las superficies, y de tirarlas sus tangentes, sobre todo si los discípulos se aplican á construirlas con la mayor exâctitud, si emplean grandes dimensiones, y si en quanto es posible trazan las curvas en toda su extension.

84 En todo quanto precede hemos mirado las curvas de doble curvatura como determinadas cada una de ellas por dos superficies curvas, de las quales es la interseccion, y en efecto es el punto de vista baxo el qual se presentan comunmente en la geometría descriptiva. En este caso, hemos visto que es siempre posible el tirarlas tangentes. Pero del mismo modo que una superficie curva puede ser determinada por medio de la forma y del movimiento de su generatriz, puede suceder tambien que una curva sea dada por la ley del movimiento de un punto generador; y entonces, para tirarle una tangente, si no se quiere recurrir á la análisis, se puede emplear el método de Roberval. Este método, que inventó antes que Descartes hubiese aplicado la geometría al álgebra, se halla implícitamente comprehendido en los métodos del cálculo diferencial, y por esta razon no se hace mencion de él en los elementos de matemáticas; nos contentarémos con hacer de él un breve extracto. Los que deseen ver muchas de sus aplicaciones, podrán consultar las Memorias de la Academia de las Cien-

cias de París, anteriores á 1699, en las quales se han recogido las obras de Roberval.

85 Quando, en virtud de las leyes de su movimiento, un punto generador se dirige continuamente hácia un mismo punto en el espacio, la línea que corre en virtud de esta ley es recta; pero si en cada instante de su movimiento se halla al mismo tiempo impelido hácia dos puntos, la línea que corre, y que en algunos casos particulares puede aun ser recta, es en general una línea curva. Se tendrá la tangente á esta curva tirando por el punto de la curva dos rectas, segun las dos direcciones diferentes del movimiento del punto generador; llevando sobre sus direcciones, y en sentido conveniente, partes proporcionales á las dos velocidades respectivas de este punto, acabando el paralelógramo, y tirando la diagonal, que será la tangente pedida: pues esta diagonal estará en la direccion del movimiento del punto generador en el punto de la curva que se considera.

86 No citarémos mas de un solo exemplo.

Atados los extremos de un hilo AMB (*fig. 36*) en dos puntos fixos A, B, si por medio de una punta M se estira este hilo, y se hace mover la punta de modo que el hilo esté siempre tirante, la punta describirá una curva DCM, que, como se sabe, es una elipse, cuyos focus se hallan en A y B. Segun la generacion de esta curva es muy fácil tirarla una tangente por el método de Roberval. En efecto, puesto que la longitud del hilo no varía en cada instante del movimiento, el radio AM se alarga de la misma cantidad de que el radio MB se acorta. La velocidad del punto generador en la direccion AM es por consiguiente igual á su velocidad en la direccion MQ. Luego si se llevan sobre MB, y sobre la prolongacion de AM, rectas iguales MQ, MP, y si se concluye el paralelógramo MPRQ, la diagonal MR de este paralelógramo será la direccion del punto generador en M, y por consiguiente la tangente al mismo punto de la curva. Se ve claramente, segun esto, que en la elipse la tangente divide en dos partes iguales el ángulo BMP formado por uno de los radios vectores, y por la prolongacion del otro, que los ángulos AMS y BMR son iguales entre sí, y que la curva debe tener la propiedad de reflexar á uno de sus focus los rayos de luz que parten del otro.

Es fácil extender el método de Roberval al caso de tres dimensiones, y de aplicarlo á la construccion de las tangentes de las curvas de doble curvatura. En efecto, si un punto generador se mueve en el espacio, de modo que en cada instante de su movimiento se halle impelido hácia tres puntos diferentes, la línea que él corre, y que en algunos casos particulares puede ser plana y aun recta, es en general una curva de doble curvatura. Se tendrá la tangente de esta curva en un punto qualquiera, tirando por este punto rectas, segun las tres direcciones diferentes de los movimientos del punto generador; llevando sobre estas rectas, y en sentido conveniente, partes proporcionales á las tres velocidades respectivas de este punto; acabando el paralelepípedo, y tirando su diagonal, esta será la tangente de la curva en el punto que se considera.

87 Vamos á aplicar este método á un caso análogo al de la elipse, y la fig. 37, que vamos á emplear, representará el objeto en perspectiva y no en proyeccion.

Dados tres puntos A, B, C en el espacio, sea AMB un hilo atado por sus dos extremos en A y B, AMC otro hilo de una magnitud independiente de la del primero, y atado por sus extremos en los dos puntos A y C; si un punto generador, tomando al mismo tiempo los dos hilos, se mueve de modo que estos hilos esten siempre tirantes, trazará una curva de doble curvatura. Para tirar una tangente á esta curva en el punto M, es menester observar que siendo constante la longitud del primer hilo AMB en cada instante del movimiento, la cantidad de que se alarga la parte AM, es precisamente igual á aquella de que se acorta MB; y que la velocidad del punto generador en la direccion AM es igual á su velocidad en la direccion MB. Del mismo modo la longitud del hilo AMC, siendo constante la velocidad del punto generador en la direccion MC, es aun igual á la velocidad en la direccion AM. Luego si sobre la prolongacion de AM, y sobre las rectas MB, MC, se toman las partes iguales MP, MQ, MR, y si se termina el paralelepípedo MPUSVQRT, la diagonal MS de este paralelepípedo será la tangente pedida.

Como el método de Roberval está fundado sobre el principio de la composicion del movimiento, es fácil echar de ver que en los casos menos simples que los que hemos elegido por exemplos se puede echar mano de los métodos conocidos para hallar la resultante de las fuerzas que actúan en este punto, y cuyas magnitudes y direcciones se conocen.

IV.

Aplicacion del método de construir las intersecciones de las superficies curvas á la solucion de diversas qüestiones.

88 Hemos dado (*fig. 26*) el método de construir las proyecciones de la interseccion de dos superficies curvas, de forma y de posicion determinadas; y lo hemos hecho de un modo abstracto, esto es, sin ocuparnos de la naturaleza de las qüestiones que podrian hacer necesarias semejantes investigaciones. La exposicion de este método, considerada de un modo abstracto, bastaria para la mayor parte de las artes; pues si se toman por exemplos el arte del corte de piedras y el de la carpintería, las superficies curvas que en ellos se consideran, y cuyas intersecciones puede ofrecerse trazar, son el objeto principal de que se ocupan dichos artes, y se presentan naturalmente. Pero la geometría descriptiva, debiendo llegar á ser un dia una de las partes principales de la educacion nacional, porque los métodos que da son tan necesarios á los artistas, como lo son la lectura, la escritura y la aritmética, creemos que es útil el hacer ver por medio de algunos exemplos cómo puede suplir á la análisis en la resolucion de un gran número de qüestiones, que á primera vista no parecen susceptibles de poder ser tratadas de este modo. Principiarémos desde luego por exemplos que no exîgen mas que la interseccion de planos; luego pasarémos á aquellos para los quales son necesarias las intersecciones de las superficies curvas.

89 La primera qüestion que llama con particularidad la atencion de los que aprenden los elementos de la geometría elemental es la de determinar el centro del círculo cuya circunferencia pasa por tres puntos colocados arbitrariamente sobre un plano. La determinacion de este centro por la interseccion de dos líneas rectas, sobre cada una de las quales debe hallarse necesariamente, hace impresion en los discípulos, así por su generalidad, como por ser un medio de execucion. Si toda la geometría estuviese tratada de este modo, lo que es posible, convendria á mayor número de talentos; seria cultivada y practicada por mayor número de personas; la instruccion media se hallaria mas adelantada, y aun la misma ciencia habria hecho mayores progresos. En las tres dimensiones exîste una qüestion análoga, á la que acabamos de citar, y vamos á empezar por ella.

90 *Primera qüestion.* Hallar el centro y el radio de una esfe-

ra, cuya superficie pasa por quatro puntos dados arbitrariamente en el espacio.

Solucion. Dados los quatro puntos por sus proyecciones horizontales y verticales, se concebirá por uno de ellos rectas tiradas á cada uno de los otros tres; y se trazarán las proyecciones horizontales y verticales de estas tres rectas. Despues, considerando la primera de estas rectas, es evidente que el centro pedido, debiéndose hallar á iguales distancias de sus extremos, debe hallarse sobre el plano perpendicular á esta recta, tirada por el medio de ella. Si se dividen en partes iguales las proyecciones de la recta, lo que dará las proyecciones de su mitad, y si se construyen las trazas del plano tirado por el punto perpendicularmente á la recta, lo que sabemos hacer, se tendrán las trazas de un plano, sobre el qual debe hallarse el centro que se busca. Considerando luego las otras dos rectas, y haciendo consecutivamente para cada una de ellas la misma operacion, se tendrán las trazas de los tres planos diferentes, sobre cada uno de los quales debe hallarse el centro pedido. Puesto que el centro debe hallarse sobre el primero y sobre el segundo de estos planos, se hallará en la recta de su comun interseccion: luego si se construyen las proyecciones de esta interseccion, se tendrá sobre cada plano de proyeccion una recta que contendrá la proyeccion del centro. Por la misma razon, si se construyen las proyecciones de la interseccion del primer plano y del tercero, se tendrá aun sobre cada plano de proyeccion otra recta que contendrá la proyeccion del centro. Luego sobre cada plano de proyeccion se tendrán dos rectas, que por medio de su interseccion determinarán la proyeccion pedida del centro de la esfera.

Si se emplease la interseccion del segundo plano y del tercero, se tendria una tercera recta, que pasaria por el centro, y cuyas proyecciones pasarian tambien por las proyecciones pedidas, lo que ofrece un medio de verificacion.

En quanto al radio es evidente, que si por la proyeccion del centro y por la de uno de los puntos dados se tira una recta, dicha recta será su proyeccion; por consiguiente se podrá tener la proyeccion horizontal y la proyeccion vertical del radio, y por consiguiente su magnitud.

91 Si se pudiese elegir la posicion de los planos de proyeccion, el método precedente se podrá simplificar considerablemente. En efecto, supongamos que uno de estos planos, por exemplo el horizontal (*fig. 38*), pase por tres puntos dados; de modo que de las proyecciones dadas A, B, C, D de los quatro

puntos, los tres primeros se confundan con sus puntos respectivos; luego, despues de haber tirado las tres rectas AB, AC, AD, supongamos que el plano vertical sea paralelo á AD, esto es, que las rectas LM y AD sean paralelas entre sí; las proyecciones verticales de los tres primeros puntos estarán sobre LM en los puntos *a*, *b*, *c*, y la del quarto estará en algun punto *d* de la recta D*d* perpendicular á LM. Sentado esto, siendo horizontal la recta tirada del punto A al punto B, todo plano que le sea perpendicular será vertical, y tendrá por proyeccion horizontal una recta perpendicular á AB. Lo mismo sucede con la recta tirada del punto A al punto C. Luego, si sobre el medio de AB se le tira una perpendicular indefinida E*e*, esta perpendicular será la proyeccion horizontal de un plano vertical que pasa por el centro de la esfera: luego la proyeccion horizontal del centro se hallará en alguno de los puntos de la recta E*e*. Igualmente, si sobre el medio de AC se la tira la perpendicular indefinida E*f*, esta perpendicular será la proyeccion de un segundo plano vertical que pasa por el centro de la esfera, y la proyeccion horizontal de este centro estará en alguno de los puntos de E*f*: luego el punto G de interseccion de las dos rectas E*e*, E*f* será la proyeccion horizontal del centro de la esfera, la proyeccion vertical estará por consiguiente sobre la recta indefinida de proyeccion G*gg'*.

La recta tirada del punto A al quarto punto, siendo paralela á su proyeccion vertical *ad*, todo plano que le sea perpendicular será tambien perpendicular al plano vertical de proyeccion, y tendrá por proyeccion vertical una recta perpendicular á *ad*. Si sobre el medio de *ad* se la tira una recta indefinida H*h*, se tendrá la proyeccion de un tercer plano que pasa por el centro de la esfera: luego la proyeccion vertical de este centro, debiéndose hallar al mismo tiempo sobre *gg'* y sobre H*h*, estará en el punto K de interseccion de estas dos rectas.

En fin, si se tiran las dos rectas AG, *a*K, se tendrán evidentemente las dos proyecciones de un mismo radio de la esfera: luego si se lleva AG sobre LM, de *g* á J, la recta JK será la magnitud del radio pedido.

92 *Segunda qüestion*. Inscribir una esfera en una pirámide triangular dada, esto es, hallar la posicion del centro de la esfera, y la magnitud de su radio.

Solucion. La superficie de la esfera inscrita, debiendo tocar las quatro caras de la pirámide, es evidente que si por el centro de la esfera y por cada una de las seis aristas se concibe un plano, este plano dividirá en dos partes iguales el ángulo que forman entre si las dos caras que pasan por la misma arista. Luego si entre las seis aristas se eligen tres que no pasen todas por el mismo vértice de un ángulo sólido, y si por cada una de estas aristas se hace pasar un plano que divida en dos partes iguales el ángulo formado por las dos caras correspondientes, se tendrán tres planos, sobre cada uno de los quales debe hallarse el centro de la esfera pedida, y que por su interseccion comun deben determinar la posicion de este centro.

93 Para simplificar la construccion supondrémos que los planos de proyeccion hayan sido elegidos de modo, que el que nosotros mirarémos como horizontal sea una de las caras de la pirámide.

Sean pues A, B, C, D (*fig. 39*) las proyecciones horizontales dadas de los vértices de los quatro ángulos sólidos de la pirámide, y *a*, *b*, *c*, *d'* sus proyecciones verticales; por el vértice de la pirámide se concebirán planos perpendiculares á los tres lados de la base: estos planos serán verticales, y sus proyecciones horizontales serán las rectas DE, DF, DG, baxadas perpendicularmente desde el punto D sobre los lados AC, CB, BA de la base. Cada uno de estos planos cortará la base de la pirámide y la cara que pasa por la arista en dos rectas, que formarán un ángulo igual al que la cara forma con la base. Luego si se lleva sobre LM las rectas DE, DF, DG, contando desde la vértical D*dd'*, de *d* á *e*, *f*, *g*; y si por el vértice *d'* se tiran las rectas *d'e*, *d'f*, *d'g*, estas rectas formarán con LM ángulos iguales á los que las caras correspondientes de la pirámide forman con la base; y si se divide cada uno de estos tres ángulos en dos partes iguales por las rectas *ee'*, *ff'*, *gg'*, los ángulos que estas últimas rectas formarán con LM serán iguales á los que formarán con la base las caras de una segunda pirámide; que tendria la misma base que la pirámide dada, y cuyo vértice estaria en el centro de la esfera pedida.

Para hallar el vértice de esta segunda pirámide se la cortará por un plano horizontal, tirado á una altura arbitraria, cuya proyeccion vertical se tendrá tirando una horizontal qualquiera *pn*. Esta recta cortará *ee'*, *ff'*, *gg* en puntos *h'*, *i'*, *k'*, de los quales se baxarán sobre LM las verticales *h'h*, *i'i*, *k'k*; y si se llevan las tres distancias *he*, *if*, *kg* sobre las perpendiculares respectivas de E á H, de F á J, y de G á K, se tendrá en H, J, K las proyecciones horizontales de puntos tomados en las tres caras de la segunda pirámide, y que se hallan sobre el plano horizontal arbitrario. Luego si por los puntos H, J, K se tiran á los lados respectivos de la base las paralelas PN, NO, OP, estas rectas serán las proyecciones de las secciones de las tres caras de la segunda pirámide por el mismo plano horizontal; se cortarán en puntos N, O, P, que serán las proyecciones de otros tantos puntos de las tres aristas de la segunda pirámide; y si por estos puntos se tiran á los vértices de los ángulos respectivos de la base rectas indefinidas AP, BO, CN, estas rectas serán las proyecciones de las aristas; en fin, el punto único Q, en el qual se encontrarán todas tres, será la proyeccion horizontal del vértice de la segunda pirámide, y por consiguiente del centro de la esfera pedida.

Para tener la proyeccion vertical de este centro se tirará primero la recta indefinida de proyeccion Qqq', sobre la qual debe hallarse; despues se proyectarán los tres puntos N, O, P sobre la horizontal *np* en *n*, *o*, *p*; por las proyecciones *a*, *b*, *c* de los vértices de los ángulos respectivos de la base se tirarán las rectas *ap*, *bo*, *cn*, que serán las proyecciones verticales de las tres aristas; y el punto único q', en el qual se cortarán estas tres últimas rectas, y que estará al mismo tiempo sobre la recta Qqq', será la proyeccion vertical del centro de la esfera.

En fin, la vertical qq' será evidentemente igual al radio de la esfera inscrita, y los puntos Q, *q* serán las proyecciones del punto de contacto de la superficie de la esfera con el plano de la base.

94 Hemos hecho ver (3) por medio de qué consideraciones se podia determinar la posicion de un punto, quándo se conocian sus distancias á tres puntos conocidos de posicion: vamos ahora á dar la construccion de esta qüestion.

Tercera qüestion. Construir las proyecciones de un punto, cuyas distancias á otros tres puntos dados en el espacio son conocidas.

Solucion. Supondrémos que se eligen los planos de proyeccion de modo, que aquel que nosotros miramos como horizontal pase por los tres puntos dados, y que el otro sea perpendicular á la recta que une dos de estos puntos. Sentado esto, sean A, B, C (*fig. 40*) los tres puntos dados, A′, B′, C′ las distancias dadas de estos puntos al punto pedido. Se unirán dos de los puntos con la recta AB, á la qual se tirará perpendicularmente la recta LM que determina la posicion del plano vertical de proyeccion. Despues, desde los puntos A, B, C como centros y con radios iguales á las distancias respectivas A′, B′, C′, se describirán tres arcos de círculos, que se cortarán de dos en dos en puntos D, E, F, J, P, Q; por los puntos de interseccion de estos arcos, considerados de dos en dos, se tirarán las rectas DE, FJ, PQ, que serán las proyecciones horizontales de las circunferencias de los círculos, en los quales se cortan las tres esferas; y el punto único N, en el qual se encontrarán estas tres rectas, será evidentemente la proyeccion horizontal del punto pedido.

Para tener la proyeccion vertical del mismo punto se tirará la línea de proyeccion indefinida N*nn'*; despues, observando que el círculo proyectado en DE es paralelo al plano vertical, y que su proyeccion sobre este plano debe ser un círculo del mismo radio, se proyectará la recta AB sobre LM en el punto *r*, desde el qual, como centro, y con un intervalo igual á DR, ó á la mitad de DE, se describirá el círculo *dnen'*; y la circunferencia de este círculo cortará la recta N*nn'* en dos puntos *n*, *n'*, que serán indiferentemente la proyeccion vertical del punto pedido.

Las otras circunstancias de la qüestion determinarán si los dos puntos *n* y *n'* deben ser ámbos empleados; y en el caso en que solo uno fuese necesario, quál de los dos debe suprimirse.

El lector podrá proponerse el construir las proyecciones de un punto cuyas distancias se conocen á tres líneas dadas en el espacio.

95 *Quarta qüestion.* Un Ingeniero, corriendo un pais montañoso, bien sea para estudiar la disposicion del terreno, bien sea para hacer el proyecto de obras públicas, que dependen de esta disposicion, se ha provisto de un mapa topográfico, en la qual no solamente las proyecciones de los diferentes puntos del terreno son exâctas, sino aun las alturas de todos estos puntos encima de una misma superficie de nivel estan indicadas por números, colocados al lado de los puntos respectivos, y á los quales se les llama generalmente *cotas*. Encuentra un punto notable, que no está señalado sobre el mapa, sea porque se omitió, sea porque se ha hecho notable despues de levantado el mapa. El Ingeniero no lleva consigo otro instrumento con que observar que un grafómetro para medir ángulos, el qual tiene una aplomada.

Se pide que, sin mudar de sitio, construya sobre el mapa la posicion del punto en que se halla, y que determine la *cota* que conviene á este punto, esto es, su altura encima de la superficie de nivel.

Medio de resolverla. Entre los puntos del terreno señalado con precision sobre el mapa, y que sean los mas próxîmos, el Ingeniero distinguirá tres, de los quales, al menos dos, no esten á la misma altura que él; despues observará los ángulos formados por la vertical, y los radios visuales dirigidos á estos tres puntos, y por medio de esta sola observacion podrá resolver la qüestion.

En efecto, llamemos A, B, C los tres puntos observados, cuyas proyecciones horizontales tiene en el mapa, y cuyas proyecciones verticales podrá construir por medio de sus *cotas*. Puesto que conoce el ángulo formado por la vertical, y por el radio visual dirigido al punto A, conoce tambien el ángulo formado por el mismo radio y por la vertical levantada en el punto A; pues despreciando la curvatura de la tierra, lo que es conveniente, estos dos ángulos son alternos internos, y por consiguiente iguales. Luego si concibe una superficie cónica de base circular, cuyo vértice esté en el punto A, cuyo exe sea vertical, y cuyo ángulo formado por el exe y por la recta generatriz sea igual al ángulo observado, lo que determina completamente esta superficie, pasará por el radio visual dirigido al punto A, y por consiguiente por el punto de estacion: así tendrá una primera superficie curva determinada, sobre la qual se hallará el punto pedido. Haciendo el mismo raciocinio para los otros dos puntos B, C, el punto que se pide se hallará aun sobre otras dos superficies cónicas de bases circulares, cuyos exes serán verticales, sus vértices estarán en B, C, y para cada uno de los quales el ángulo formado por el exe y por la generatriz será igual al ángulo formado por la vertical y por el radio visual correspondiente. El punto pedido se hallará al mismo tiempo sobre tres superficies cónicas determinadas de forma y de posicion, y por consiguiente en su comun interseccion. No se trata pues mas que de construir, conforme á los datos de la qüestion, las proyecciones horizontales y verticales de las intersecciones de estas tres superficies consideradas de dos en dos; las intersecciones de estas proyecciones darán las proyecciones horizontal y vertical del punto pedido, y por consiguiente la posicion de este punto sobre el mapa, y su altura encima ó debaxo de los puntos observados lo que dará su cota.

Esta solucion debe dar en general ocho puntos que satisfagan á la qüestion; pero el observador distinguirá fácilmente entre estos ocho puntos quál es el que coincide con el de estacion. De contado él podrá siempre asegurarse si el punto de la estacion está mas arriba ó mas abaxo del plano que pasa por los tres puntos observados. Supongamos que este punto esté encima del plano de los tres vértices de los conos; podrá no hacer caso de los ramos de las intersecciones de las superficies cónicas que exîsten debaxo de este plano; de este modo el número de los puntos posibles se reduce á quatro. Lo mismo sucederia si el punto de la estacion estuviese al contrario colocado debaxo del plano. Luego entre estos quatro puntos, si es que todos exîsten, hallará con facilidad aquel cuya posicion, respecto á los tres vértices, es la misma que la del punto de estacion respecto á los puntos observados.

96 *Construccion.* Sean A, B, C (*fig.* 41) las proyecciones horizontales de los tres puntos observados, tomados sobre el mapa; *a*, *b*, *c* las proyecciones verticales de los mismos puntos construidos, llevando sobre las verticales B*b*, C*c*, contando desde la horizontal LM, que pasa por el punto *a*, la diferencia de las cotas de los otros dos puntos; y sean A′, B′, C′ los ángulos observados que los radios visuales dirigidos á los puntos respectivos A, B, C forman con la vertical.

Se tirarán las verticales indefinidas *aa′*, *bb′*, *cc′*, que serán las proyecciones verticales de los exes de los tres conos; por los tres puntos *a*, *b*, *c* se tirarán las rectas *al*, *bm*, *cn*, que formarán con estas verticales ángulos respectivamente iguales á los ángulos dados A′, B′, C′; y estas rectas serán cada una la proyeccion vertical de uno de los dos lados extremos de la superficie cónica correspondiente.

Hecho esto, se tirarán en la proyeccion vertical tantas rectas horizontales *ee′* como se quieran; se las mirará como las proyecciones de otros tantos planos horizontales; y para cada una de ellas se hará la operacion que vamos á describir para aquella de entre ellas que está indicada por EE′.

Esta recta cortará las proyecciones de los exes de los tres conos en puntos *f*, *g*, *h*, que serán las proyecciones verticales de los centros de los círculos, segun los quales el plano horizontal correspondiente corta las tres superficies cónicas; y cortará los lados extremos de los conos *al*, *bm*, *cn*, en los puntos *f′*, *g′*, *h′* tales, que las distancias *ff′*, *gg′*, *hh′* serán los radios de estos mismos círculos. Desde los puntos A, B, C, tomados sucesivamente por centros, y con los radios respectivamente iguales á *ff′*, *gg′*, *hh′* se describirán círculos, cuyas circunferencias serán las proyecciones horizontales de las secciones hechas en las tres superficies cónicas por el mismo plano EE′: estas circunferencias se cortarán de dos en dos en puntos D, D′, K, K′, J, J′, que serán las proyecciones de otros tantos puntos de las tres intersecciones de las superficies cónicas consideradas de dos en dos; y proyectando estos puntos sobre EE′ en *d*, *d′*, *k*, *k′*, *i*, *i′*, se tendrán las proyecciones verticales de los mismos puntos de las tres intersecciones.

Obrando despues del mismo modo con las otras rectas *ee′*, se hallará para cada una de ellas nuevos puntos D, D′, K, K′, J, J′ en la proyeccion horizontal, y nuevos puntos *d*, *d′* *k*, *k′*, *i*, *i′* en la proyeccion vertical: luego por todos los puntos D, D′....... se hará pasar una curva DPD′, que será la proyeccion horizontal de la interseccion de la primera superficie cónica con la segunda; por todos los puntos K, K′..... se hará pasar otra KPK′, que será la proyeccion de la interseccion de la segunda superficie y de la tercera; y por todos los puntos J, J′...... se hará pasar una última JPJ′, que será la proyeccion de la interseccion de la tercera superficie y de la primera. Todos los puntos P......, en que se cortarán estas tres curvas, serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos que satisfacen á la qüestion.

Igualmente por todos los puntos *d*, *d′*...... en la proyeccion vertical se hará pasar una curva; por todos los puntos *k*, *k′*.... una segunda; y por todos los puntos *i*, *i′*...... una tercera. Estas curvas serán las proyecciones verticales de las intersecciones de las tres superficies consideradas de dos en dos; y todos los puntos *p*....., en los quales estas curvas se cortarán todas tres, serán las proyecciones verticales de todos los puntos que satisfacen á la qüestion.

Las proyecciones P, *p* de un mismo punto estarán en una misma perpendicular á LM.

El observador, despues de haber reconocido entre todos los puntos P aquel que pertenece al punto de la estacion, tendrá la proyeccion horizontal de esta estacion, y por consiguiente su posicion sobre el mapa: despues, por medio de la altura del punto correspondiente *p* encima de la recta LM, tendrá la elevacion del punto de la estacion encima del punto observado A, y por consiguiente hallará la cota que conviene á la estacion.

97 En esta solucion hemos construido las proyecciones de las tres intersecciones de las superficies, siendo así que hubieran bastado dos. Aconsejamos que se haga siempre lo mismo, porque las proyecciones de las dos curvas de doble curvatura pueden cortarse en puntos que no correspondan á puntos de interseccion, y que para reconocer las proyecciones de los puntos de interseccion es menester seguir las ramas de las dos curvas, que estan sobre un mismo lado de una de las superficies; lo que exîge una atencion penosa, de que casi siempre se excusa construyendo las tres curvas; los puntos en que se cortan todas tres, son puntos verdaderos de interseccion.

98 *Quinta qüestion.* Las circunstancias, siendo las mismas que en la qüestion precedente, con sola la diferencia de que el instrumento no está acompañado de aplomada, de modo que no puedan medirse los ángulos con la vertical, no obstante se pide que el Ingeniero, sin salir de la estacion, determine sobre el mapa la

posicion del punto en que se halla, y que encuentre la cota de este punto, esto es, su elevacion sobre la superficie de nivel, á la qual se hallan referidos todos los puntos del mapa.

Medio para resolverla. Despues de haber elegido tres puntos del terreno que esten señalados con exâctitud sobre el mapa, y tales que el punto de estacion no esté en el mismo plano que ellos, el Ingeniero medirá los tres ángulos que forman entre sí los radios visuales dirigidos á estos tres puntos, y por medio de esta sola observacion podrá resolver la qüestion.

En efecto, si llamamos A, B, C los tres puntos observados, y si se les supone unidos por las tres rectas AB, BC, CA, el Ingeniero tendrá las proyecciones horizontales de estas rectas trazadas sobre el mapa; ademas, por medio de las cotas de estos tres puntos tendrá las diferencias de altura de los extremos de estas rectas; por consiguiente podrá determinar las longitudes de cada una de ellas.

Sentado esto, si en un plano qualquiera tirado por AB se concibe un triángulo rectángulo BAD (*fig. 42*), construido sobre AB como base, y cuyo ángulo en B sea el complemento del ángulo baxo el qual ha sido observado el lado AB, el ángulo en D será igual al ángulo observado, y la circunferencia de círculo descrita por los tres puntos A, B, D gozará de la propiedad que si de un punto qualquiera E del arco ADB se tiran dos rectas á los puntos A y B, el ángulo en E que formarán entre sí será igual al ángulo observado. Luego si se concibe que el plano del círculo gira al rededor de AB como charnela, el arco ADB engendrará una superficie de revolucion, de la qual todos los puntos gozarán de la misma propiedad, esto es, que si desde un punto qualquiera de la superficie se tiran dos rectas á los puntos A y B, estas rectas formarán entre sí un ángulo igual al observado. Como es evidente que los puntos de esta superficie de revolucion son los únicos que gozan de esta propiedad, se sigue que esta superficie pasará por el punto de estacion. Si se hace el mismo raciocinio para las otras dos rectas BC, CA, se tendrán otras dos superficies de revolucion, sobre cada una de las quales deberá tambien hallarse el punto de la estacion: este punto estará por consiguiente al mismo tiempo sobre tres superficies diferentes de revolucion, cuyas formas y posicion son determinadas, estará pues en su comun interseccion. Así construyendo las proyecciones horizontales y verticales de las intersecciones de estas tres superficies, consideradas de dos en dos, los puntos en que se corten estas mismas tres proyecciones serán las proyecciones de los puntos que satisfacen á la qüestion. La proyeccion horizontal dará la posicion del punto sobre el mapa, y la proyeccion vertical dará la elevacion de este punto encima ó debaxo de los puntos observados.

99 Si se tratase esta qüestion por la análisis, conduciria generalmente á una equacion del grado sesenta y quatro; pues cada una de las superficies de revolucion tiene quatro capas distintas, dos de ellas son engendradas por el arco de círculo ADB, y las otras dos por el arco AFB. Cada una de las capas de la primera, pudiendo ser cortada por las de la segunda, pueden resultar diez y seis ramos en la curva de interseccion; y los diez y seis ramos, pudiendo ser cortados por las quatro capas de la tercera superficie, pueden resultar sesenta y quatro puntos de interseccion de las tres superficies; pero no todos estos puntos satisfacen á la qüestion. En efecto, si de un punto qualquiera F del arco AFB se tiran rectas á los extremos de AB, el ángulo AFB que formarán no será igual al ángulo observado, sino que será su suplemento. Las capas engendradas por el arco AFB, y las capas análogas en las otras superficies de revolucion, no pueden por consiguiente servir para resolver la qüestion; y todos los puntos de interseccion que pertenecen á algunas de estas capas son puntos extraños al problema.

En la geometría descriptiva se puede y se debe excluir el arco AFB y sus análogos en las otras dos superficies; cada una de estas superficies no tiene entonces mas de dos capas, y el número de sus puntos de interseccion posible se reduce á ocho. De estos ocho puntos quatro estan de un lado del plano que pasa por los tres exes de revolucion, y quatro del otro. El observador, conociendo siempre de qué lado se halla situado respecto á este plano, no construirá las intersecciones que se hallan situadas del otro, y el número de los puntos que él podrá hallar queda reducido á quatro. En fin, entre estos quatro puntos, si es que exîsten todos, reconocerá fácilmente el que está colocado respecto á los puntos A, B, C, del mismo modo que el de la estacion lo está respecto á los tres puntos del terreno que él ha observado.

100 *Construccion.* Se elegirá la posicion de los dos planos de proyeccion, de modo que aquel que nosotros miramos como horizontal pase por los tres puntos observados, y que el otro sea perpendicular á la recta tirada por dos de estos tres puntos. Sea pues ABC (*fig.* 42) el triángulo formado por los tres puntos observados, considerado en su plano, y A′, B′, C′ los tres ángulos dados por la observacion. Se tirará perpendicularmente á AB la recta LM, que indicará la posicion del plano vertical de proyec-

cion; y se construirá, como acabamos de indicarlo (*núm.* 98) los arcos de los círculos generadores AEDB, BGC, C,FA de las tres superficies de revolucion, cuyos exes son los lados AB, BC, AC. Hecho esto, desde el punto A como centro se describirán tantos arcos de círculo EO,F quantos se quieran, que cortarán las generatrices, cuyos exes se encuentran en A, en puntos E, ,F, de los quales se baxarán sobre los exes respectivos perpendiculares indefinidas EE′, ,F,F′: estas perpendiculares se cortarán en alguna parte en un punto H, que será la proyeccion horizontal de un punto de interseccion de las dos superficies, cuyos exes son AB y AC, y la curva AHP, tirada por todos los puntos H.... hallados de este modo será la proyeccion horizontal de esta interseccion. Luego, despues de haber proyectado el exe AB en *a*, se describirá desde el punto *a* como centro, y con radios sucesivamente iguales á las perpendiculares EE′ arcos de círculo *ee′h*, sobre cada uno de los quales, proyectando el punto H correspondiente en *h*, se tendrá la proyeccion vertical de un punto de la interseccion de las mismas dos superficies de revolucion; y la curva *ahp* trazada por todos los puntos *h*....., construidos de este modo, será la proyeccion vertical de esta interseccion.

Se hará lo mismo para las otras dos superficies de revolucion al rededor de los exes AB, BC, esto es, del punto B de reunion de los dos exes, como centro, se describirán tantos arcos de círculo DKG como se quieran: estos arcos cortarán las generatrices en puntos D, G, de los quales se baxará sobre los exes respectivos las perpendiculares indefinidas DD′, GG′: estas perpendiculares se cortarán en J, y la curva BJP, tirada por todos los puntos J, será la proyeccion horizontal de la interseccion de la primera y de la tercera superficie de revolucion. Del punto *a* como centro y con radios sucesivamente iguales á las perpendiculares DD′, se describirán arcos de círculo *dd′i*, sobre los quales se proyectará en *i* los puntos J correspondientes; y la curva *aip*, trazada por todos los puntos *i*, será la proyeccion vertical de la misma interseccion.

Hecho esto, todos los puntos P....., en los quales se cortan las curvas AHP, BJP, serán las proyecciones horizontales de otros tantos puntos que satisfacen la qüestion; y todos los puntos *p*...., en los quales se cortarán las curvas *ahp*, *aip*, serán las proyecciones verticales de los mismos puntos.

Las proyecciones halladas de este modo no darán inmediatamente la posicion del punto de la estacion sobre el mapa, ni su altura, porque el plano horizontal de proyeccion no es el del mapa; pero será fácil de referirlos á los verdaderos planos de proyeccion.

101 *Sexta qüestion.* Un General de exército, en presencia del enemigo, no tiene el mapa del pais que este ocupa, y le necesita para hacer el plan de un ataque que medita; pero tiene un globo aerostático, y encarga á un Ingeniero subir por medio de este globo, y tomar todas las medidas necesarias para hacer un mapa, y dar una nivelacion aproxîmada; pero teme que el enemigo no eche de ver la intencion de esta operacion, si se hace mudar de lugar al areonauta; por consiguiente permite al Ingeniero que suba á diferentes alturas de la atmósfera, si es que fuese necesario; pero le prohibe el mudar de situacion sobre el terreno. El Ingeniero tiene un instrumento para medir los ángulos, acompañado de una aplomada: se pide cómo hará el Ingeniero para executar las órdenes del General.

Medio de resolver la qüestion. El Ingeniero hará dos estaciones en la misma vertical, y conocerá la distancia de la una á la otra haciendo medir la cuerda que se haya desarrollado en el intervalo de ámbas. En una de las estaciones, por exemplo en la inferior, medirá los ángulos que hace la vertical con los rayos visuales dirigidos á los puntos cuya posicion quiere determinar sobre la carta: despues, entre todos estos puntos, elegirá uno, que mirará como el primero, y que llamarémos A; medirá ademas sucesivamente los ángulos formados por el rayo visual dirigido al punto A, y los que se dirigen á todos los otros puntos. En la otra estacion medirá los ángulos formados por la vertical y los rayos visuales dirigidos á todos los puntos del terreno. Segun estas observaciones se hallará en estado de construir el mapa pedido.

En efecto, puesto que se conocen los ángulos formados por la vertical y los dos rayos visuales dirigidos de las dos estaciones al mismo objeto, este debe hallarse al mismo tiempo sobre dos superficies cónicas determinadas y conocidas, pues las bases de estas superficies son circulares; tienen sus exes en la misma vertical: la distancia de sus vértices es igual á la diferencia entre las alturas de las dos estaciones, y los ángulos que forman sus generatrices con el exe comun son iguales á los ángulos observados. Ademas, puesto que se conoce el ángulo formado por el rayo visual dirigido de la primera estacion á este punto, y por el que se dirigió al punto A; el punto que se considera se hallará aun sobre una tercera superficie cónica de base circular, cuyo exe inclinado será el rayo visual dirigido de la primera estacion al punto A, cuyo vértice estará en la primera estacion, y en el qual el ángulo formado por su exe y por la generatriz será igual al ángulo observado. El punto que se considera se hallará por consiguiente al mismo tiempo sobre superficies cónicas de bases circulares conocidas de forma y de posicion; por consiguiente se hallará en su interseccion comun; y construyendo las proyecciones horizontal y vertical de esta interseccion, se tendrá la posicion del punto sobre el mapa, y su elevacion encima ó debaxo de los otros.

102 Sin mudar de consideraciones puede hacerse la construccion mas simple por medio de algunos de los métodos que hemos explicado anteriormente; pues, conociendo los ángulos formados en la primera estacion por el rayo visual dirigido al punto A, y por los otros dirigidos á los demas puntos, y conociendo para cada uno de estos ángulos los que sus lados forman con la vertical, será fácil reducirlos al horizonte, esto es, construir sus proyecciones horizontales. Luego si se toma sobre el mapa un punto arbitrario para representar la proyeccion de la vertical del Areonauta; y si por este punto se tira una recta arbitraria, que deba representar la proyeccion del rayo visual dirigido al punto A; en fin, si por el mismo punto se tiran rectas que formen, con la proyeccion del radio dirigido al punto A, ángulos iguales á los ángulos reducidos al horizonte, es evidente que cada una de estas rectas deberá contener la proyeccion horizontal del punto del terreno que le corresponde. Solo faltará determinar la distancia de este punto del terreno á la vertical. Si en la proyeccion vertical, y sobre la proyeccion de la vertical del Areonauta, se toman dos puntos, que en partes de la escala disten entre sí de una cantidad igual á la distancia medida de las dos estaciones, y si se tiran por estos puntos rectas que formen con la vertical ángulos iguales á los que se hayan observado para el mismo punto del terreno, estas rectas se cortarán en un punto, cuya distancia á la vertical será la distancia pedida. Llevando pues esta distancia sobre el radio correspondiente, contando desde la proyeccion del Areonauta, se tendrá sobre el mapa la posicion del punto del terreno. Las mismas dos rectas determinan en la proyeccion vertical, por su interseccion, la altura del punto del terreno; tomando pues sobre la proyeccion vertical las alturas de todos los puntos del terreno, encima del mismo plano horizontal, se determinarán las cotas que convendrán á todos los puntos de la carta, y se tendrá la nivelacion del terreno.

Como esta construccion es bastante sencilla, no necesita de figura.

Habiéndose trazado arbitrariamente sobre el mapa la recta tirada desde la proyeccion de la vertical del Areonauta á la del primer punto A observado, se sigue que el mapa no está orientado; y en efecto, en las observaciones que hemos indicado nada hay que pueda determinar la posicion de los objetos respecto á los quatro puntos cardinales del horizonte. Pero si el Ingeniero observa en tierra el ángulo que hace con la meridiana un rayo visual horizontal dirigido desde el extremo de la vertical á uno de los objetos colocados sobre el mapa, y si traslada este ángulo sobre su proyeccion, tendrá la direccion de la meridiana, y el mapa estará orientado.

V.

103 Lo que hemos visto hasta ahora de la geometría descriptiva, considerada de un modo abstracto, contiene los métodos principales necesarios para las artes.

Si se hubiesen establecido en todas las cabezas de partido escuelas secundarias, en las quales los jóvenes de edad de doce años, y que se destinan á la práctica de algun arte, se exercitasen durante dos años en las construcciones gráficas, y se familiarizasen con los principales fenómenos de la naturaleza, cuyo conocimiento les es indispensable; lo qual, exercitando su entendimiento, y acostumbrándolos á la exáctitud, y haciéndoles apreciar sus ventajas, contribuiria sin la menor duda á los progresos de la industria nacional, y al mismo tiempo acostumbrándolos á la evidencia, les pondria para siempre al abrigo de la seduccion de toda especie de impostores; si nuestro objeto hubiera sido hacer un libro elemental, que sirviese de base para la instruccion de las escuelas secundarias, hubiera sido necesario terminar aquí la teoría, y pasar inmediatamente á las aplicaciones mas útiles, y á aquellas cuyo uso es mas freqüente. Pero no debemos escribir solamente para los discípulos de las escuelas secundarias, sino tambien debemos escribir para sus maestros.

No deben de entrar en el plan de una instruccion general, sino objetos simples y de una utilidad cotidiana; pero si un artista encuentra una sola vez en su vida una dificultad de que no se haya tratado en las escuelas, ¿á quién ha de acudir para que se la explique sino al maestro de ellas? ¿y cómo podrá explicársela si no se ha exercitado en consideraciones de mayor generalidad que las que forman el objeto ordinario de los estudios.

Para dar á los maestros el conocimiento de algunas propiedades generales de la extension, y de que puede necesitarse hacer uso en las artes, vamos á consagrar algunas lecciones al exámen de la curvatura de las curvas de doble curvatura, y al de las superficies curvas.

De la curvatura y de las evolutas de las curvas de doble curvatura.

104 Se sabe que si una recta, considerada en un plano, gira al rededor de uno de sus puntos supuesto fixo, todos los otros puntos de la recta describirán al rededor del punto fixo circunferencias de círculos concéntricos. No hay curva ninguna que no pueda concebirse engendrada de este modo.

Fig. 43. Sea MNO una curva qualquiera trazada sobre un plano; si se concibe que una recta AB se mueve de modo que siempre sea tangente á la curva, y no tenga movimiento alguno en el sentido de su longitud, cada punto P de esta recta describirá una curva GPP′P″H, que tendrá evidentemente las propiedades siguientes.

Cada elemento PQ de la curva descrita será perpendicular á la direccion correspondiente de la recta AB; pues este elemento tiene la misma direccion que tendria en P el elemento de un arco de círculo descrito desde el punto M de contacto, como centro, y con un radio igual á PM. Así la tangente en P de la curva descrita será perpendicular á la recta tirada por el punto P, tangente á la curva dada MNO.

Si el punto P se halla del lado hácia el qual la recta AB se acerca á la curva de quien es tangente, la curva GP se dirigirá hácia MNO hasta que la encuentre; lo que sucederá quando el punto P, que describe la curva GPQ, haya llegado él mismo á ser el de contacto de la recta AB, supuesta trasladada en CD; pero esta curva no se prolongará mas allá; y si la recta continúa su movimiento, el punto P, y por consiguiente la curva que él describe, se reflexará en P′. La curva trazada siendo siempre perpendicular á la recta movible, las dos ramas GPP′y P′P″H serán ámbas perpendiculares á la recta CD, y por consiguiente á la curva MNO que esta recta toca en P′. Estas dos ramas se tocarán por consiguiente en P′.

El punto P′ en que una curva se reflexa, de modo que sus dos ramas se toquen en este punto, se llama punto de retroceso.

La curva MNO, sobre la qual se apoya la recta tocándola continuamente, se llama la *evoluta* de la curva GPP′P″H, porque uno de sus arcos qualquiera MNP′ es igual á la parte correspondiente MP de la recta movible; y la curva GPP′P″H se llama la *evolvente* de la curva MNO. Como se pueden tener tantas curvas descritas de este modo como puntos P, *p* se pueden concebir sobre la recta AB, mirada como indefinida, es evidente que una misma evoluta puede tener una infinidad de evolventes diferentes, tales como GPP′P″H, *gpp′p″h*; y todas estas evolutas tienen la propiedad de tener las mismas normales. Muy pronto verémos que recíprocamente no hay curva que no tenga una infinidad de evolutas diferentes.

105 En las artes se hace uso de algunas evolventes, y principalmente de la del círculo, que es una espiral cuyo número de revoluciones es infinito, y cuyas ramas sucesivas distan todas las unas de las otras de una cantidad constante, igual á la circunferencia del círculo evoluto. Tal es la forma que se dan á los dientes con que los exes que giran deben levantar pilones, como en las máquinas para quebrantar y machacar la mina, porque el contacto del diente con la superficie del pilon, hallándose siempre en la misma vertical, el esfuerzo que hace el exe para levantar el pilon siempre es el mismo. Vaucanson empleaba á menudo la espiral evolvente del círculo como medio de engranage para comunicar el movimiento de un exe que gira á otro que le es paralelo, sobre todo quando era menester que el engrànage fuese exâcto, y que comunicase instantáneamente, sin pérdida de tiempo, el movimiento del un árbol al otro.

106 Hemos hecho ver (*104*) como la evolvente puede ser formada por medio de la evoluta; es fácil de concebir recíprocamente de qué modo la evoluta puede formarse por medio de la evolvente. En efecto, hemos visto que todas las normales de la evolvente son tangentes á la evoluta. Luego si por los puntos P, Q de una curva propuesta GPQP′ se conciben normales, la curva MNO que tocará todas estas normales será la evoluta. Ademas, si por dos puntos P, Q consecutivos é infinitamente próxîmos se conciben dos normales PB, Q*b*, el punto M en que se cortarán, para cruzarse mas allá, será uno de los puntos de la evoluta; y este punto podrá ser mirado como el centro de un pequeño arco de círculo, que estando descrito con el radio PM, tendria la misma curvatura que el arco PQ de la curva que se considera. El radio MP del círculo, cuya curvatura es la misma que la del arco infinitamente pequeño PQ de una curva, se llama *el radio de curvatura de este arco*; el punto M en que se cortan las dos normales consecutivas es el centro de curvatura; y esta curvatura es conocida quando la posicion del punto M es determinada.

107 Hasta aquí hemos supuesto que las curvas eran planas, y no hemos considerado sino lo que sucede en su plano. Vamos á pasar á las curvas de doble curvatura, tales como las que resultan de la interseccion de dos superficies curvas.

Si se concibe una rectá tirada por el centro de un círculo perpendicularmente á su plano, y prolongada indefinidamente por una parte y por otra, se sabe que cada uno de los puntos de esta recta estará á iguales distancias de todos los puntos de la circunferencia; que por consiguiente, si se imagina que una segunda recta, terminada por una parte en uno de los puntos de la circunferencia, y del otro en un punto qualquiera de la perpendicular, gira al rededor de esta última como exe, haciendo constantemente el mismo ángulo con ella, su extremo movible describirá la circunferencia del círculo con la misma exâctitud que si se hubiese hecho girar al radio al rededor del centro. La descripcion del círculo por medio del radio, la qual no es sino un caso particular de la primera, es la mas propia por causa de su sencillez para dar idea de la extension del círculo; pero si no se trata mas que de descripcion, la primera puede en ciertos casos ser mas ventajosa, porque tomando sobre el exe dos polos colocados en una y otra parte del plano del círculo, tirando despues por estos dos puntos dos rectas, que se cortarian en un punto de la circunferencia, y haciendo luego mover el sistema de estas dos rectas al rededor del exe, de modo que su punto de interseccion estuviese fixo sobre la una y sobre la otra, este punto describiria la circunferencia del círculo, sin haber sido necesario antes executar el plano, en el qual dicha circunferencia debe de hallarse.

108 *Fig. 44.* Sea KA*a*D una curva qualquiera de doble curvatura trazada en el espacio. Por un punto A de esta línea imagínese un plano MNOP perpendicular á la tangente en A; por el punto *a* infinitamente próxîmo imagínese igualmente un plano *mn*OP perpendicular á la tangente en *a*; estos dos planos se cortarán en una recta OP, que será el exe del círculo, del qual puede suponerse que hace parte el pequeño arco A*a* de la curva; de modo que si desde los puntos A, *a* se baxan dos perpendiculares sobre esta recta, estas perpendiculares, iguales entre sí, la encontrarán en el mismo punto G, que será el centro de este círculo. Todos los otros puntos g, g', g''..... de esta recta estarán cada uno á iguales distancias de todos los puntos del arco infinitamente pequeño A*a*, y podrán por consiguiente ser mirados como polos. Así, si desde un punto qualquiera *g* de este exe se tiran dos rectas á los puntos A, *a*, estas rectas *g*A, *ga* serán iguales entre sí, y formarán con

el exe los ángulos A*g*O, *ag*O iguales; de suerte que si se quisiera determinar la curvatura de la curva en un punto A, seria menester dar la longitud del radio de curvatura AG; y si se tratase de indicar el sentido de la curvatura, seria menester dar la posicion del centro G en el espacio. Pero si se trata solamente de describir el pequeño arco, bastará igualmente, ó hacer girar la recta A*g* al rededor del exe, sin alterar el ángulo A*g*O que forma con él, ó hacer girar el radio de curvatura AG perpendicularmente á este exe.

Así la recta OP puede ser mirada como la línea de los polos del elemento A*a*; el centro de curvatura de este elemento es el de sus polos, cuya distancia al elemento es un *mínimo*; en fin, su radio de curvatura es la perpendicular AG, baxada del elemento sobre la línea de los polos.

109 *Fig. 45*. Hágase ahora sobre todos los puntos de la curva de doble curvatura la misma operacion que la que se acaba de hacer sobre uno de sus elementos, esto es, que por todos los puntos consecutivos A, A′, A″, A‴ &c. se hagan pasar planos MNOP, perpendiculares cada uno á la tangente de la curva en el punto en el qual la corta: el primero de estos planos encontrará el segundo en una recta OP, que será el lugar geométrico de los polos del arco AA′; el segundo encontrará al tercero en una recta O′P′, lugar de los polos del arco A′A″, y así sucesivamente. Es evidente que el sistema de todas las rectas de intersecciones, ó la superficie curva que forman por su reunion, será el lugar geométrico de los polos de la curva KAD; pues esta curva no tendrá polo alguno que no se halle sobre la superficie, y esta superficie no tendrá punto que no sea el polo de alguno de los elementos de la curva.

110 Antes de pasar adelante es necesario exponer algunas propiedades que gozan este género de superficies, independientemente de la curva que ha servido á su formacion.

Estas superficies pueden desarrollarse sin formar desigualdades ni pliegues sobre un plano. En efecto, los elementos, tales como OPP′O′ de que se compone la superficie, son porciones de planos infinitamente estrechos, y que se reunen sucesivamente por líneas rectas. Se puede pues siempre concebir que el primero de estos elementos OPP′O gira al rededor de O′P′ como charnela, hasta que esté en el plano del elemento que sigue O′P′P″O″; que despues los dos así unidos giren al rededor de O″P″ hasta que esté en el plano del tercero, y así sucesivamente. Donde se ve que nada impide que de este modo todos los elementos de la curva vengan á formar un verdadero plano.

Del mismo modo que los planos normales á la curva KAD forman por sus intersecciones sucesivas una superficie curva, á la qual todos son tangentes; del mismo modo las líneas rectas, en las quales se cortan, se encuentran sucesivamente en puntos que forman una curva de doble curvatura, á la qual son tangentes todas estas rectas; porque dos de estas rectas consecutivas son las intersecciones de un mismo plano normal, con el que precede, y con el que le sigue inmediatamente. Estas dos rectas estan en un mismo plano; por consiguiente se cortan en alguna parte, y la serie de todos estos puntos de reunion forma una curva notable sobre la superficie evolvente. En efecto, las rectas consecutivas, despues de haberse cruzado sobre la curva que las toca todas, se prolongan mas allá, y forman con sus prolongaciones una capa de superficie distinta de la capa formada por las partes de las mismas rectas antes de sus reuniones. Estas dos capas se juntan sobre la curva, que es, respecto á la superficie entera, una verdadera arista de retroceso.

Fig.45. Ahora desde el punto A de la curva, por el qual pasa el primer plano normal MNOP, tírese en el plano, y segun una direccion arbitraria, una recta Ag hasta que encuentre la seccion OP en un punto g; por los puntos A$'$, g tírese en el segundo plano normal, la recta A$'g$ prolongada hasta que encuentre la seccion O$'$P$'$ en un punto g'; tírese igualmente A$''g'g''$, y así sucesivamente. La curva que pasa por todos los puntos g, g', g'' &c. es una evoluta de la curva KAD: pues todas las rectas Ag, A$'g'$, A$''g''$ son las tangentes de la curva $gg'g''$, puesto que son las prolongaciones de los elementos de esta curva. Ademas, si se concibe que la primera Ag gira al rededor de OP como exe para ir á aplicarse sobre la siguiente A$'g$, no habrá cesado de ser tangente á la curva $gg'g''$; y su extremo A, despues de haber corrido el arco AA$'$, se confundirá con el extremo A$'$ de la segunda. Hágase del mismo modo girar la segunda línea A$'g'$ al rededor de O$'$P$'$ como exe, para que venga á aplicarse sobre la tercera A$''g'$, no cesará de tocar la curva $gg'g''$, y su extremo A$'$ no saldrá del arco A$'$A$''$, y así sucesivamente. Luego la curva $gg'g''$ es tal, que si se concibe que una de sus tangentes gira al rededor de esta curva sin dexar de serle tangente, y sin moverse en la direccion de su longitud, uno de los puntos de esta tangente describirá la curva KAD, por consiguiente es una de sus evolutas. Pero como la direccion de la primera recta Ag fue arbitraria, y que qualquiera que hubiera sido la direccion que se la hubiese dado en el plano normal, se habria hallado otra curva $gg'g''$, que seria igualmente una evo-

luta de la curva KAD. Se sigue que una curva qualquiera tiene una infinidad de evolutas, que estan todas comprehendidas sobre una misma superficie curva.

Las rectas $A'g'$ y $A''g'$ forman ángulos iguales con la recta $O'P'$; y el elemento $g'g''$, siendo la prolongacion de la recta $A''g'$, se sigue que los dos elementos consecutivos gg', $g'g''$ de la evoluta $gg'g''$ forman ángulos iguales con la recta $O'P'$ que pasa por su punto de contacto. Quando se desarrolla la superficie para aplicarla sobre un plano, los elementos de la evoluta no dexan de formar los mismos ángulos con las rectas $O'P'$; luego dos elementos consecutivos de la curva $gg'g''$, considerados en la superficie extendida sobre un plano, forman ángulos iguales con una misma línea recta: luego se hallan en la prolongacion el uno del otro. De aquí se sigue que cada una de las evolutas de una curva de doble curvatura se reduce á una línea recta, quando la superficie que las contiene á todas se halla extendida sobre un plano, por consiguiente es la mas corta que se pueda trazar sobre esta superficie entre sus dos puntos extremos.

De aquí se deduce un medio fácil de obtener una evoluta qualquiera de una curva de doble curvatura, quando se tiene la superficie desarrollable que las contiene á todas. Para esto basta hacer pasar por un punto de la curva un hilo tangente á la superficie, y doblar despues este hilo sobre la superficie, teniéndolo tirante, pues por medio de la tension tomará la direccion de la curva la mas corta entre sus extremos, por consiguiente se plegará sobre una de las evolutas.

111 Sentado esto, se concibe de qué modo se puede engendrar por un movimiento contínuo una curva qualquiera de doble curvatura, pues teniendo la superficie desarrollable, y á la qual son tangentes todos los planos normales de la curva, si de un punto dado en el espacio, y por el qual debe pasar la curva, se dirigen dos hilos tangentes á esta superficie; y si despues de haberlos plegado sobre la superficie, teniéndolos tirantes, se fixan los otros extremos, el punto de reunion de los dos hilos, que tendrá la facultad de moverse con el plano tangente á la superficie, sin resbalar sobre el uno, ni sobre el otro de los hilos, engendrará con su movimiento la curva propuesta.

112 Todo quanto acabamos de decir respecto á las curvas de doble curvatura, conviene igualmente á las curvas planas, con solo esta diferencia, que todos los planos normales, siendo perpendiculares al plano de la curva, todas las rectas de sus intersec-

ciones consecutivas son tambien perpendiculares al mismo plano, y por consiguiente paralelas entre ellas. Entonces la superficie desarrollable, y á la qual son tangentes todos estos planos normales, es una superficie cilíndrica, cuya seccion perpendicular es la evoluta ordinaria de la curva. Pero esta superficie cilíndrica contiene igualmente todas las evolutas de doble curvatura de la misma curva; y cada una de estas evolutas hace con todas las rectas generatrices de la superficie cilíndrica ángulos constantes. El filete de una rosca comun es una de las evolutas de la evolvente del círculo que sirve de base á la superficie cilíndrica sobre la qual se halla; y qualquiera que sea la altura del paso de la rosca, si el diámetro del cilindro no varía, el filete será siempre una de las evolutas de la misma curva.

113 Despues de haber expuesto la teoría de las curvas de doble curvatura, vamos á ocuparnos de las superficies curvas. Este objeto es susceptible de ser tratado con mucha mas facilidad con el socorro de la análisis, que por medio de la consideracion de las propiedades de la extension; pero los resultados á que conduce pueden ser útiles á los artistas, á quienes no debemos suponer familiarizados con las operaciones analíticas: vamos á ensayar el modo de exponerlas, no empleando otras consideraciones que las geométricas. Este método introducirá la claridad que le es característica, pero al mismo tiempo se resentirá de la lentitud de su marcha.

Las superficies respecto á sus curvaturas pueden dividirse en tres grandes clases. La primera comprehende las que en todos sus puntos no tienen curvatura alguna: estas superficies se reducen al plano que puede ser colocado de un modo arbitrario en el espacio. La segunda clase comprehende todas las que en cada uno de sus puntos no tienen mas de una curvatura; tales son en general todas las superficies desarrollables, en las quales dos elementos consecutivos tomados en qualquiera de sus partes pueden ser mirados como partes de una superficie cónica, aun suponiendo indefinido el tamaño de estos elementos en el sentido de la generatriz de la superficie cónica. En fin, todas las otras superficies curvas componen la tercer clase; en cada uno de sus puntos tienen dos curvaturas diferentes, y que pueden variar la una independientemente de la otra. Principiemos considerando las superficies curvas las mas simples, y en primer lugar las superficies cilíndricas.

114 Sea ABFE (*fig. 46*) una superficie cilíndrica indefinida de base qualquiera, sobre la qual se considera un punto L toma-

do arbitrariamente. Concibamos por este punto la recta generatriz CLG, y una seccion JLK hecha por un plano perpendicular á la generatriz; esta seccion será paralela y semejante á la base de la superficie. En fin, concibamos por el punto L la normal LP á la superficie; esta normal será perpendicular á la generataiz CG, y por consiguiente estará en el plano de la seccion JLK; ademas será perpendicular á la tangente de la seccion en el punto L; ó lo que satisface al mismo tiempo á las dos condiciones, será perpendicular al plano tangente á la superficie en el punto L. Sentado esto, si se toman sobre la superficie otros dos puntos infinitamente próxîmos al punto L, el uno M sobre la generatriz CG, el otro N sobre la seccion perpendicular; y si por cada uno de estos puntos se tira una nueva normal á la superficie, estas dos normales MQ, NP estarán cada una en un mismo plano con la primera normal LP; pero estos dos planos serán diferentes para cada una de las dos últimas normales. En efecto, el plano tangente á la superficie en L, siendo tambien tangente en M, las dos rectas LP y MQ serán perpendiculares al mismo plano, por consiguiente son paralelas entre sí, y estan en un mismo plano. Se pueden mirar estas paralelas como líneas que se encuentran al infinito. En quanto á las normales LP, NP, es evidente que estan comprehendidas en el plano de la seccion perpendicular, por consiguiente concurren en un cierto punto P de este plano: así los dos planos que contienen las tres normales de dos en dos, no solo son diferentes, sino perpendiculares el uno al otro.

115 Ahora, qualquiera otro punto O que se tome sobre la superficie, infinitamente próxîmo al primer punto L, si se concibe por este punto una normal OQ á la superficie, esta normal no estará en el mismo plano con la primera normal LP, y por consiguiente no podrá encontrarla: pues si por el punto O se concibe una nueva seccion *iOk* perpendicular á la superficie, y que corte en algun punto M la recta generatriz que pasa por el punto L, la normal OQ se hallará en el plano de esta seccion. Las dos normales LP y OQ se hallarán por consiguiente en dos planos paralelos, y no podrán estar la una y la otra en un mismo plano, á menos que no sean paralelas, lo que no se verifica. En efecto, si se concibe la normal en el punto M, hemos visto que esta normal MQ será paralela á LP, y no lo será á OQ: luego las normales LP y OQ no son paralelas entre sí, por consiguiente no estan en el mismo plano, y no pueden encontrarse jamas.

116 Se ve pues que si despues de haber tirado, por un punto qualquiera de una superficie cilíndrica, una normal á la superfi-

cie, se quiere pasar á un punto infinitamente próxîmo, para el qual la nueva normal esté en el mismo plano que la precedente, y que pueda encontrarla, aunque sea á una distancia infinita, si fuese necesario, no puede esto hacerse sino en dos sentidos diferentes: 1.º siguiendo la direccion de la recta generatriz de la superficie, y entonces la nueva normal encuentra la primera al infinito: 2.º siguiendo la seccion perpendicular á la superficie, y entonces la nueva normal encuentra la primera en un punto, cuya distancia depende de la curvatura de la base en el punto correspondiente; en fin que estas dos direcciones formen entre sí sobre la superficie ángulos rectos.

Los dos puntos de reunion de las tres normales son por consiguiente los únicos *centros de curvatura* posibles del elemento que se considera sobre la superficie; los dos planos diferentes que pasan por la primera normal y por cada una de las otras dos indican el sentido de cada una de estas curvaturas; las distancias del punto de la superficie á los dos puntos de reunion de las normales son *los radios de las dos curvaturas*; y se ve que en las superficies cilíndricas, siendo siempre uno de estos radios infinito, mientras que la del otro depende de la naturaleza de la base de la superficie, para cada uno de los puntos no hay mas de una curvatura finita, la otra es siempre infinitamente pequeña ó nula.

Lo que acabamos de decir se puede aplicar á todas las superficies desarrollables, en las quales dos elementos consecutivos, aunque sean indefinidos en el sentido de la direccion de la recta generatriz, pueden ser considerados siempre como haciendo parte de una cierta superficie cilíndrica. Pasemos ahora al caso general de las superficies curvas qualesquiera.

117 Sea ABCD (*fig.* 47) una superficie curva qualquiera, sobre la qual se considera un punto L tomado á voluntad, concíbase por este punto una recta FL*f* tangente á la superficie: la posicion de esta recta no estará determinada; podrá ser tirada de un modo qualquiera en el plano tangente á la superficie en el punto L. Concibamos luego que la recta F*f* se mueve paralelamente á sí misma, y que sea siempre tangente á la superficie curva, engendrará por su movimiento una cierta superficie cilíndrica E*eg*G, cuya base dependerá de la forma de la superficie curva, y que tocará esta superficie curva en una curva LCKAL, engendrada ella misma por el movimiento del punto de contacto de la recta generatriz con la superficie curva. Esta curva de contacto LCKAL es en general de doble curvatura.

118 En el caso muy particular de la superficie curva del se-

gundo grado, esto es, de la superficie que, siendo cortada por un plano qualquiera, produce siempre una seccion cónica, la línea de contacto, con una superficie cilíndrica que la rodea, es siempre una curva plana, qualquiera que sea la direccion de la generatriz de la superficie cilíndrica.

119 En el caso un poco mas general, en que la superficie curva es engendrada por el movimiento de una línea curva plana fixa en su plano, pero movible con él quando corre sobre dos superficies curvas dadas: para cada punto de la superficie exîste una direccion que dar á la recta generatriz, para que la superficie cilíndrica, engendrada por el movimiento de esta recta, toque la superficie curva en una curva plana; y esta direccion debe ser tal, que la recta sea siempre perpendicular al plano movible quando pasa por el punto que se considera. Las superficies de revolucion son un caso particular. En efecto, si por un punto qualquiera de una superficie de revolucion se concibe una recta tangente á la superficie, y perpendicular al plano del meridiano que pasa por este punto, y si se supone que esta recta se mueve de modo que sea siempre tangente á la superficie, y perpendicular al plano del mismo meridiano, el punto de contacto de la línea con la superficie correrá la circunferencia del meridiano, y la recta engendrará una superficie cilíndrica, que tocará la superficie de revolucion en la circunferencia misma del meridiano, y por consiguiente en una curva plana.

120 En todos los otros casos, una superficie cilíndrica circunscrita á una superficie qualquiera toca esta superficie en una curva LCKAL, que es de doble curvatura.

La recta FL*f* habiendo sido desde luego trazada de un modo arbitrario en el plano tangente á la superficie en el punto L, si por el punto L se concibe la tangente LU á la curva de contacto LCKAL, esta tangente hará con la línea recta generatriz FL*f* un ángulo FLU, que dependerá de la naturaleza de la superficie curva, y de la direccion arbitraria dada á la recta FL*f*. Concibamos lo que siempre es posible en cada caso particular, que la direccion de la recta FL*f* cambia, sin que esta recta dexe de ser tangente á la superficie en el punto L, y que despues de esta nueva direccion se mueva paralelamente á sí misma tocando siempre á la superficie, engendrará por su movimiento otra superficie cilíndrica circunscrita á la superficie, que la tocará en otra línea de contacto de doble curvatura; esta nueva curva de contacto pasará aun por el punto L, y su tangente en este punto hará con la nueva direccion de la recta generatriz un ángulo diferente del primer ángulo FLU. Concibamos en fin que de este modo se haya hecho variar la direccion de la recta generatriz hasta que la superficie cilíndrica, engendrada por esta recta, toque la superficie en una curva de contacto, cuya tangente en L sea perpendicular á la recta generatriz.

Sentado esto, sea (*fig. 48*) una superficie curva qualquiera, sobre la qual se considera desde luego un cierto punto L; sea FLJ la recta tangente á la superficie en L, cuya direccion se tome de modo, que si se la hace mover paralelamente á sí misma, y sin que dexe de tocar la superficie, engendrará una superficie cilíndrica EFGHJK, que toca á la superficie en una curva, cuya tangente en L sea perpendicular á FLJ. La línea de contacto de la superficie cilíndrica con la superficie propuesta será una curva de doble curvatura; pero en el punto L su elemento se confundirá con el elemento LN de la seccion CNLD hecha en la superficie cilíndrica por un plano perpendicular á la recta generatriz FLJ. Los dos extremos L, N de este elemento, hallándose sobre la línea de contacto, estarán al mismo tiempo sobre las dos superficies; y si por estos puntos L, N se tiran dos normales LP, NP á la superficie cilíndrica, serán tambien normales á la curva. Pero estas dos normales se hallan en el mismo plano perpendicular á la generatriz de la superficie cilíndrica, y deben encontrarse en algun punto P, que es el centro de curvatura del arco LN: luego si sobre una superficie curva qualquiera se toman dos puntos L, N, que esten colocados sobre la línea de contacto de esta superficie con la superficie cilíndrica, cuya recta generatriz sea perpendicular al elemento LN de esta línea de contacto, las normales á la superficie curva, tiradas por estos dos puntos, estarán en un mismo plano, y se encontrarán en un punto, que será el centro de la curvatura de la superficie en la direccion del plano que contiene las dos normales.

121 Si se toma sobre la recta FLJ un punto *m* infinitamente próxîmo al punto L, y si por este punto *m* se concibe una normal á la superficie cilíndrica, esta normal será paralela á LP, y no será normal á la superficie curva. Pero si se concibe que en el plano de la curva ALMB, determinado por las rectas FLJ y LP, la recta FLJ se mueve sin dexar de tocar la superficie, y toma la posicion infinitamente próxîma *fi*, de modo que toque la superficie en un punto M infinitamente próxîmo al punto L, y si se supone que esta recta *f*M*i* se mueva paralelamente á sí misma tocando siempre la superficie, engendrará una nueva superficie cilíndrica *efghik* infinitamente semejante á la primera, tanto en la

forma, quanto en la posicion, y la línea de contacto de esta nueva superficie cilíndrica pasará por el punto M. La normal MQ á esta superficie cilíndrica en el punto M será tambien normal á la superficie curva; estará en un mismo plano con la primera normal LP, puesto que ámbas estarán en el plano determinado por las rectas FLJ, *fMi*; y este plano será perpendicular al que pasa por las normales LP, NP. Las dos normales LP y MQ se encontrarán por consiguiente en un cierto punto R, que será el centro de curvatura del arco LM, y por consiguiente el centro de la curvatura de la superficie en la direccion del plano que pasa por las rectas FLJ, *fMi*.

Se ve pues que si considerando sobre una superficie curva qualquiera un punto indeterminado L, se concibe en este punto una normal á la superficie, se puede siempre pasar, segun dos direcciones diferentes á otro punto M ó N, para el qual la nueva normal esté en un mismo plano con la primera, y que hallándose estas dos direcciones sobre planos normales rectangulares entre sí, forman tambien ángulos rectos sobre la superficie curva.

122 Estas dos direcciones son en general las únicas, para las quales puede suceder esto; á saber: que si sobre la superficie curva se pasa en qualquiera otra direccion á un punto O, infinitamente próxîmo al punto L, y que si por este punto se tira la normal OQ á la superficie, esta normal no estará en el mismo plano con la normal LP, y por consiguiente no podrá encontrarla.

En efecto, concibamos que la segunda superficie cilíndrica se haya inclinado de modo, que si su línea de contacto con la superficie pasa por el punto O, el arco OM de esta línea de contacto se confundirá con el arco de la seccion C′OMD′ perpendicular á la superficie cilíndrica; las dos normales en O y en M á la superficie serán tambien normales á la superficie cilíndrica; estarán en el plano de la seccion perpendicular; se encontrarán en algun punto Q; pero la normal OQ no encontrará la normal LP; pues para que estas dos normales se encontrasen seria menester que el punto Q de la normal coincidiese con el punto R, en el qual esta normal encuentra LP; lo que en general no sucede porque esto supone una igualdad entre las curvaturas de los dos arcos LM y LN, y lo que no puede suceder sino para ciertos puntos de algunas superficies curvas. Por exemplo la curvatura de la superficie de la esfera siendo la misma en todos sentidos, qualquiera que sea la direccion que se siga para pasar de uno de sus puntos á otro infinitamente próxîmo, las normales tiradas por estos dos puntos estan siempre en un mismo plano; y esta superficie es la única en la que esta propiedad conviene á todos sus puntos. En las superficies de revolucion, en las quales la curva generatriz corta al exe perpendicularmente, la curvatura en el vértice es aun la misma en todos sentidos, y dos normales consecutivas estan siempre en un mismo plano; pero esta propiedad no tiene lugar sino en el vértice. En fin, exîsten superficies curvas, en las quales esta propiedad tiene lugar para una serie de puntos, que forman una cierta curva sobre la superficie; pero esto no sucede sino para los puntos de esta curva, y para todos los otros puntos de la superficie la nueva normal no puede encontrar la primera, á menos que el punto de la superficie, por el qual pasa, no se tome segun una de las dos direcciones que hemos determinado.

123 De aquí se sigue que en general una superficie qualquiera no tiene en cada uno de sus puntos sino dos curvaturas; que cada una de estas curvaturas tiene su centro particular, su radio particular, y que los dos arcos sobre los quales se toman estas dos curvaturas estan á ángulos rectos sobre la superficie. Los casos particulares, para los quales, como en la esfera y en los vértices de las superficies de revolucion se encuentran dos normales consecutivas, no son una excepcion de esta proposicion. Resulta solamente que para estos casos las dos curvaturas son iguales entre sí, y que las direcciones, segun las quales se las debe estimar, son indiferentes.

124 Aunque las dos curvaturas de una superficie curva dependan una de otra, por la ley de la generacion de la superficie, no obstante experimentan de un punto de la superficie á otro variaciones que pueden ser en un mismo sentido ó en sentidos contrarios. No podemos entrar sobre esta materia en grandes detalles, que serian infinitamente menos penosos con el auxîlio de la análisis: nos contentarémos con observar, que para ciertas superficies, tales como los esferóides, en cada punto las curvaturas son ámbas en el mismo sentido, esto es, son convexâs hácia el mismo lado; que respecto á otras superficies, en ciertos puntos las dos curvaturas son en sentido opuesto, esto es, que la una presenta su concavidad, y la otra su convexîdad al mismo lado (la superficie del carril de una polea está en este caso); que para algunas otras superficies, las dos curvaturas son en sentido opuesto en todos sus puntos (la superficie engendrada por el movimiento de una línea recta, precisada á cortar siempre otras tres rectas dadas arbitrariamente en el espacio, se halla en este caso); en fin, que en una superficie particular estas dos curvaturas opuestas son para

cada punto iguales entre sí. Esta superficie es aquella cuya area es un *mínimo*.

125 Pasemos ahora á algunas conseqüencias que resultan de las dos curvaturas de una superficie curva, y que importa hacerlas conocer á los artistas.

Fig. 49. Sea una porcion de superficie curva qualquiera, sobre la qual considerarémos un punto L tomado arbitrariamente, y concíbase la normal á la superficie en L. Acabamos de ver que se puede pasar segun dos direcciones diferentes, del punto L á otro M ó L′, cuya nueva normal encuentra la primera, y que estas dos direcciones forman ángulos rectos sobre la superficie. Sean pues LM y LL′ estas dos direcciones rectangulares en L. Del punto M se podrá igualmente pasar con dos direcciones diferentes á otro punto N ó M′, para el qual su normal encuentra la normal á M, y sean MN y MM′ estas dos direcciones, rectangulares en M. Obrando del mismo modo para el punto N, se hallarán las dos direcciones NO y NN′ rectangulares en N; para el punto O se tendrán las dos direcciones OP, OO′, y así sucesivamente. La serie de los puntos L, M, N, O, P..... &c., para los quales dos normales consecutivas se hallan siempre en un plano, formará sobre la superficie curva una línea curva, que indicará constantemente el sentido de una de las dos curvaturas de la superficie, y esta curva será una línea de primera curvatura, que pasará por el punto L. Si se hace con el punto L′ lo que se ha hecho con L, se podrá desde luego pasar, segun dos direcciones rectangulares, á un nuevo punto M′ ó L″, cuya normal encontrará la del punto L′; y se hallará del mismo modo una serie de puntos L′, M′, N′, O′, P′..... &c., que formarán sobre la superficie curva otra línea de primera curvatura, que pasará por el punto L′. Haciendo lo mismo con la serie de puntos L″, L‴, L⁗ .... hallados como L′, L″, se tendrán nuevas líneas de primera curvatura L″M″N″O″P″, L‴M‴N‴O‴P‴..... &c., que pasarán por los puntos respectivos L″, L‴, L⁗..... &c., y que dividirán la superficie curva en zonas. Pero esta serie de puntos L, L′, L″, L‴, cuyas normales consecutivas se hallan aun en un plano, formará sobre la superficie curva otra curva, que indicará constantemente el sentido de la otra curvatura de la superficie: esta curva será la línea de segunda curvatura; M, M′, M″, M‴..... &c. formará otra línea de segunda curvatura, que pasará por el punto M; la serie de los puntos N, N′, N″, N‴..... &c. formará una nueva línea de segunda curvatura, que pasará por el punto N, y así en adelante; y todas las líneas de segunda curvatura dividirán la superficie curva

en otras zonas. En fin, todas las líneas de primera curvatura cortarán en ángulos rectos todas las líneas de segunda curvatura, y estos dos sistemas de líneas curvas dividirán la superficie en elementos rectangulares; y este efecto tendrá lugar, no solamente si estas líneas estan infinitamente próxîmas, como lo hemos supuesto, sino aun tambien quando las de un mismo sistema estuviesen á distancias finitas las unas de las otras. Antes de pasar mas adelante, vamos á dar un exemplo, con el qual ya se está familiarizado.

126 Si se corta una superficie qualquiera de revolucion por una serie de planos tirados por el exe, se tendrá una serie de secciones, que serán las líneas de una de las curvaturas de la superficie; pues para que una curva sea línea de curvatura de una superficie es menester que en cada uno de sus puntos el elemento de superficie cilíndrica, que tocaria la superficie en el elemento de la curva, tenga su recta generatriz perpendicular á la curva; pero esta condicion se verifica evidentemente aquí, no solo en cada punto de la curva para un elemento de superficie cilíndrica particular, lo que bastaria, sino aun á toda la curva para una misma superficie cilíndrica. Ademas, si se corta la misma superficie de revolucion por una serie de planos perpendiculares al exe, se tendrá una segunda serie de secciones, que serán todas circulares, y que serán las líneas de la otra curvatura; pues si por un punto qualquiera de una de estas secciones se concibe la tangente al meridiano de la superficie, y si se supone que esta tangente se mueva paralelamente á sí misma para engendrar el elemento de una superficie cilíndrica ~~tangente á la superficie, el elemento~~ de la superficie cilíndrica tocará la superficie de revolucion en el arco de círculo, y este arco será perpendicular á la recta generatriz. Así, para una superficie qualquiera de revolucion, las líneas de curvatura son, para una especie de curvatura, los meridianos de la superficie, y para la otra curvatura las paralelas; y es evidente que estas dos series de curvas se cortan todas en ángulos rectos sobre la superficie.

127 *Fig.* 49. Si por todos los puntos de una de las líneas de curvatura LMNOP de una superficie curva se conciben las normales á la superficie, hemos visto que la segunda normal encontrará la primera en un cierto punto, que la tercera encontrará la segunda en otro punto, y así sucesivamente: el sistema de estas normales, de las quales dos consecutivas estan siempre en un mismo plano, forma pues una superficie desarrollable, que es en todos sus puntos perpendicular á la superficie curva, y que la corta

segun la línea de curvatura. Esta línea de curvatura, siendo ella misma en toda su extension perpendicular á las normales que componen la superficie desarrollable, es tambien una línea de curvatura de esta última superficie. La arista de retroceso de la superficie desarrollable, cuya arista está formada por la serie de los puntos de reunion de las normales consecutivas, y á la qual todas las normales son tangentes, es una de las evolutas de la curva LMNOP. Es el lugar de los centros de curvatura de todos los puntos de esta curva, y es tambien el de los centros de una de las curvaturas de la superficie para los puntos que estan sobre la línea LMNOP. Si se hace la misma observacion para todas las otras líneas de curvatura de la misma serie, tales como L′M′N′O′P′, L″M″N″O″P″..... &c., todas las normales de las superficies curvas podrán ser miradas como componiendo una serie de superficies desarrollables, todas perpendiculares á las superficies, y el sistema de las aristas de retroceso de todas estas superficies desarrollables formará una superficie curva, que será el lugar de todos los centros de una de las curvaturas de la superficie curva.

Lo que acabamos de observar, respecto á una de las dos curvaturas de la superficie, se verifica igualmente con la otra. En efecto, si por todos los puntos L, L′, L″...... &c. de una de las líneas de la otra curvatura, se conciben normales á la superficie, estas rectas estarán consecutivamente de dos en dos en un mismo plano; su sistema formará una superficie desarrollable, que será en todas sus partes perpendicular á la superficie, y que la encontrará en la línea de curvatura LL′L″....., que será ella misma una línea de curvatura de la superficie desarrollable. La arista de retroceso de esta última superficie será el lugar de los centros de curvatura de la línea LL′L″..... &c., y al mismo tiempo el de los centros de segunda curvatura de la superficie curva para todos los puntos de la línea LL′L″..... &c. Lo mismo sucederá con todas las normales tiradas por los puntos de las otras líneas de curvatura MM′M″....., NN′N″..... &c. De modo, que todas las normales de la superficie curva podrán ser miradas de nuevo como componiendo una segunda serie de superficies desarrollables todas perpendiculares á la superficie, y el sistema de las aristas de retroceso de todas estas nuevas superficies desarrollables formará una segunda superficie curva, que será el lugar de los centros de la segunda curvatura de la superficie.

128 En algunos casos particulares las superficies de los centros de las dos curvaturas de una misma superficie curva son distintas, esto es, que pueden ser engendradas separadamente, ó que

tienen sus equaciones separadas. Se tiene un exemplo en las superficies de revolucion, en las quales una de estas superficies se reduce al mismo exe de rotacion, y la otra es una superficie tambien de revolucion engendrada por la rotacion de la evoluta plana del meridiano al rededor del mismo exe. Pero lo mas freqüente, y en el caso general, estas dos superficies no son distintas, no pueden ser engendradas separadamente; tienen la misma equacion, y son dos capas diferentes de una misma superficie curva.

129 Se ve pues que todas las normales de una superficie curva se pueden considerar como las intersecciones de dos series de superficies desarrollables, tales que cada una de ellas encuentre la superficie curva perpendicularmente, y la corte segun una curva, que es al mismo tiempo línea de curvatura de la superficie curva y línea de curvatura de la superficie desarrollable, y que cada una de las superficies desarrollables de la primera serie corte todas las de la segunda serie en línea recta y en ángulos rectos.

130 Veamos ahora algunos exemplos de la utilidad que pueden traer estas generalidades en ciertos artes. El primer exemplo será tomado de la arquitectura.

Las bóvedas construidas de piedra de sillería se componen de piezas distintas, á las quales se da el nombre genérico de *dovelas*. Cada dovela tiene muchas caras, que exîgen la mayor atencion en la execucion: 1º la cara que debe de servir para el paramento, y que debiendo ser una parte de la superficie visible de la bóveda, debe de ser executada con la mayor precision, esta cara se llama el *entrados* ó *boquilla* de la dovela: 2º las caras, por las quales las dovelas ~~consecutivas se aplican las unas sobre~~ las otras, se las llama generalmente *juntas*. Las juntas exîgen tambien la mayor exâctitud en su execucion, pues la presion se comunica de una dovela á la otra perpendicularmente á la superficie de las juntas, es necesario que las dos piedras se toquen por el mayor número de puntos posible, á fin de que para cada punto de contacto, la presion sea la menor, y que para todos se acerque en lo posible á la igualdad. Es menester pues que en cada dovela las juntas se acerquen quanto es posible á la verdadera superficie de que deben hacer parte; y para que este objeto sea mas fácil de llenar, es menester que la superficie de las juntas sea de la naturaleza la mas simple, y de la execucion la mas susceptible de precision. Por esta razon se hacen ordinariamente las juntas planas; pero no todas las superficies de las bóvedas admiten esta disposicion, y en algunas nos apartariamos demasiado de las reglas adoptadas, de que hablarémos de aquí á un instante, si no se diese á las juntas una superficie curva. En este caso es menester elegir, entre todas las superficies curvas que podrian satisfacer á las otras condiciones, aquellas cuya generacion es la mas simple, y cuya execucion es mas susceptible de exâctitud. Como de todas las superficies curvas las mas fáciles de executar son las engendradas por el movimiento de una línea recta, y sobre todo las superficies desarrollables: quando es menester que las juntas de las dovelas sean superficies curvas, se las compone en quanto es posible de superficies desarrollables.

Una de las principales condiciones, á las quales debe satisfacer la forma de las juntas de las dovelas, es de ser perpendiculares á la superficie de la bóveda compuesta de estas dovelas. Pues si los dos ángulos que una misma junta forma con la superficie de la bóveda fuesen sensiblemente desiguales, aquel que fuese mayor que un ángulo recto, seria capaz de una resistencia mayor que el otro; y en la accion con que dos dovelas consecutivas actúan la una sobre la otra, el ángulo mas pequeño que el ángulo recto estaria expuesto á romperse, lo que al menos afearia la bóveda, y aun podria alterar su solidez, disminuyendo la duracion del edificio. Por consiguiente, quando la superficie de la junta debe ser curva, conviene engendrarla por una recta que sea en todas sus partes perpendicular á la superficie de la bóveda; y si ademas se quiere que la superficie de la junta sea desarrollable, es menester que todas las normales á la superficie de la bóveda, y que componen, por decirlo así, la junta, esten consecutivamente en un mismo plano. Pero acabamos de ver que esta condicion no puede ser satisfecha, á menos que todas las normales no pasen por una misma línea de curvatura de la superficie de la bóveda: luego si las superficies de las juntas de las dovelas de una bóveda deben ser desarrollables, es absolutamente indispensable que estas superficies encuentren la de la bóveda en sus líneas de curvatura.

Ademas, por grande que sea la exâctitud con que se trabajen las dovelas, la division es siempre aparente sobre la superficie; se trazan siempre líneas muy sensibles, y estas líneas deben estar sujetas á leyes generales, y deben tambien satisfacer á ciertas convenciones particulares, segun la naturaleza de la bóveda. Entre las leyes generales, las unas son relativas á la estabilidad, las otras á la duracion del edificio: de este número es la regla que prescribe que las juntas de una misma dovela formen entre sí ángulos rectos; por la misma razon deben ser perpendiculares á la superficie de la bóveda. Tambien las líneas de division de las dovelas deben ser tales, que las que dividen una misma bóveda en hiladas sean todas perpendiculares á las que dividen una misma hilada en dovelas. En quanto á los convenios particulares, son de muchas suertes, y nuestro objeto no es hacer aquí su enumeracion; pero hay uno principal, y es que las líneas de division de las dovelas que, como acabamos de ver, son de dos especies, y que deben todas cortarse perpendicularmente, deben tambien tener el carácter de la superficie á la qual pertenecen. No exîste sobre una superficie curva línea alguna que pueda llenar al mismo tiempo todas estas condiciones, sino las dos series de líneas de curvaturas, y ellas las llenan perfectamente. Así, la division de una bóveda en dovelas debe siempre hacerse por líneas de curvatura de la superficie de la bóveda, y las juntas deben ser porciones de superficies desarrollables formadas por la serie de las normales á la superficie, las quales consideradas consecutivamente se hallan de dos en dos en un mismo plano, de suerte que para cada dovela las superficies de las quatro juntas y la de la bóveda sean todas rectangulares.

Antes del descubrimiento de las consideraciones geométricas, sobre las quales se funda quanto acabamos de decir, los artistas tenian una idea confusa de las leyes á que conducen, y en todos los casos tenian costumbre de conformarse con ellas. Así, por exemplo, quando la superficie de la bóveda era de revolucion, sea que fuese en esferóide, sea que fuese en bóveda espiral, dividian sus dovelas por meridianos y por paralelos, esto es, por las líneas de curvatura de la superficie de la bóveda.

Las juntas que ~~correspondian á los meridianos eran~~ planos tirados por el exe de revolucion; las que correspondian á los paralelos eran superficies cónicas de revolucion al rededor del mismo exe; y estas dos especies de juntas eran rectangulares entre ellas, y perpendiculares á la superficie de la bóveda. Pero quando las superficies de las bóvedas no tenian una generacion tan simple, y quando sus líneas de curvatura no se presentaban de un modo tan claro, como en las bóvedas de esferóides prolongados, y en un gran número de otras, los artistas no podian satisfacer á todos los convenios, y sacrificaban en cada caso particular aquellas que les presentaban mayores dificultades.

Convendria pues que en cada una de las escuelas de geometría descriptiva el maestro se ocupase de la determinacion de las líneas de curvatura de las superficies empleadas ordinariamente en los artes, á fin que en la ocasion los artistas que no pueden consagrar mucho tiempo en semejantes investigaciones, pudiesen consultarlos con fruto, y aprovecharse de sus resultados.

131 El segundo exemplo que vamos á dar le tomarémos del arte del grabado.

En el grabado las tintas de las diferentes partes de la superficie de los objetos representados se expresan por líneas cruzadas trazadas con el buril, las quales se hacen tanto mas fuertes, ó tanto mas próxîmas las unas á las otras, quanto la tinta debe ser mas obscura.

Quando la distancia, á la qual debe verse la estampa, es bastante grande, para que las rayas no puedan distinguirse, el modo como estas se cruzan es indiferente; y qualquiera que sea el contorno de las rayas, el artista puede siempre forzarlas y multiplicarlas, de modo que consiga lo que desea, y que produzca el efecto pedido. Pero si, como sucede ordinariamente, la estampa está destinada á ser vista bastante cerca para que los contornos de las líneas se perciban, en este caso la forma de dichos contornos no es indiferente. Para cada objeto y para cada una de las partes de su superficie hay contornos de líneas mas adequados que qualquier otro, para dar una idea de la curvatura de la superficie: estos contornos particulares son siempre dos, y algunas veces los Grabadores los emplean ámbos al mismo tiempo quando, para forzar mas fácilmente sus tintas, cruzan las líneas. Estos contornos, de los quales los artistas no tienen aun sino un conocimiento confuso, son las proyecciones de las líneas de curvatura de la superficie que quieren representar. Como las superficies de la mayor parte de los objetos no son susceptibles de una determinacion rigurosa, sus líneas de curvatura no son capaces de ser determinadas, ni por el cálculo, ni por medio de construcciones gráficas. Pero si desde la niñez estuviesen los artistas acostumbrados á determinar las líneas de curvatura de un gran número de superficies diferentes, y susceptibles de determinaciones exâctas, estarian mas en estado de penetrar las formas de estas líneas y su posicion, aun para los objetos menos determinados; las percibirian con mas precision, y sus obras tendrian mas expresion.

No insistirémos sobre este objeto, que tal vez no presenta sino la menor de las ventajas que las artes y la industria deben esperar del establecimiento de las escuelas de geometría descriptiva.

ADICIONES.

I.

Se ha supuesto (núm. 4) que tres superficies cilíndricas de bases circulares tenian en general ocho puntos comunes. El objeto de esta nota no es demostrar esta proposicion, sino solamente hacer comprehender de qué modo puede tener lugar.

Consideremos primeramente dos superficies cilíndricas, y supongamos que la una teniendo un diámetro sensiblemente mas pequeño que el otro, se penetran de modo que los exes se encuentren y formen entre sí un ángulo mucho menor que el ángulo recto. Es evidente que la superficie, cuyo diámetro es mas pequeño, atravesará la otra de parte á parte, haciendo sobre la parte anterior de esta y sobre la posterior dos secciones distintas, semejantes y muy largas. Supongamos ahora que la tercera superficie cilíndrica tenga un diámetro poco mas ó menos medio entre los de los otros dos, que penetra la superficie cuyo diámetro es el mayor, de modo que los dos exes se encuentran, pero baxo un ángulo poco diferente del recto, y que atraviese las secciones hechas sobre esta superficie poco mas ó menos hácia sus medios: es claro que las secciones que producirá sobre las dos caras del cilindro grande, siendo mas anchas y menos largas que las que forma el cilindro menor, cada una de las nuevas secciones cortará á la primera en quatro puntos. Así habrá quatro puntos comunes á las tres superficies cilíndricas sobre la cara anterior de la que tiene el mayor diámetro, y habrá otras quatro sobre la cara posterior: luego habrá ocho. En ciertos casos particulares este número puede ser menor; puede reducirse á seis, á quatro, á dos, y aun á cero, segun las posiciones y los diámetros de las superficies.

II.

De la generacion de las superficies, primer exemplo (Véase núm. 12).

De las superficies gauchas. Se las puede considerar siempre como engendradas por una recta indefinida, que se mueve de modo que se apoya constantemente sobre tres curvas dadas, que la dirigen en su movimiento. Si se concibe una serie de superficies cónicas, cuyos vértices se hallan todos sobre la primera de las tres curvas dadas, y que pasan todas por la segunda de estas curvas, los puntos en que estas superficies encuentran la tercera curva dada, determinan las diferentes posiciones de la recta generatriz. Sean MEN, M'E'N', M''E''N'' (*fig. 50 en perspectiva*) las tres curvas directrices dadas: habiendo tomado sobre la primera curva un punto qualquiera E, la superficie cónica, cuyo vértice estuviese sobre este punto, y que pasase por la segunda curva M'E'N', cortaria la tercera M''E''N'' en un punto E'', lo que determinaria sobre esta superficie la arista E'E''. La posicion de esta arista seria la de la recta generatriz correspondiente al punto E: se hallaria del mismo modo la posicion de la recta generatriz para cada uno de los puntos de la curva MEN.

Quando las tres directrices son líneas rectas, resulta una superficie gaucha, que goza de una propiedad muy notable; y es que puede ser engendrada por una recta de dos modos diferentes. La primera generacion se sigue evidentemente de la determinacion que se da de la superficie: la recta movible se apoya constantemente sobre tres rectas dadas.

La segunda generacion se deduce de la primera. Que entre todas las rectas que se apoyan sobre las tres rectas dadas, se elijan tres á voluntad d, d', d''; que se consideren estas últimas como nuevas directrices, la recta movible podrá apoyarse constantemente sobre las tres rectas d, d', d''.

Sea que se tomen por directrices las tres rectas dadas, ó las tres rectas d, d', d'', la recta movible en el uno y en el otro caso engendra la misma superficie.

De esta doble generacion se sigue que podria executarse la superficie como un texido. Los hilos de los cadillos pasarian por las directrices dadas, y los de la trama por las rectas indicadas por d, d', d''. A cada punto de esta superficie corresponderian dos rectas, la una perteneciente á los *cadillos*, y la otra á la trama.

La equacion de esta superficie gaucha de doble generacion, siendo del segundo grado (véase la aplicacion de la análisis á la geometría), no puede ser cortada por una recta sino en dos puntos; y como en la segunda generacion la recta movible tiene siempre tres puntos comunes con esta superficie, se sigue que puede ser considerada como uno de sus elementos.

III.

Del plano tangente á una superficie gaucha (Continuacion del núm. 30).

Quarta qüestion. Por un punto dado sobre una superficie gaucha tirar un plano tangente á esta superficie.

La superficie gaucha es el término del espacio corrido por una recta movible. Seah (*fig.* 50) MEN, M′E′N′, M″E″N″ las tres curvas que dirigen el movimiento de la recta; Z el punto dado [1] sobre la superficie gaucha; E, E′, E″ los puntos en que el elemento de esta superficie, correspondiente al punto dado Z, encuentra las directrices; y en fin ET, E′T′, E″T″ las tangentes de las directrices tiradas por los puntos E, E′, E″.

Concíbase la superficie que tendria por directrices las tres tangentes ET, E′T′, E″T″, y sean EE′E″, FF′F″, GG′G″ tres posiciones qualquiera de su generatriz, es fácil de ver que esta superficie y la dada tienen un elemento comun EE′E″, en el qual se tocan; de suerte que todo plano tangente á la una toca necesariamente la otra. Para tirar por el punto dado Z un plano tangente á la superficie gaucha, que tiene por directrices las tres tangentes, es menester determinar dos rectas, por las quales debe pasar este plano. Pero se ha visto (adicion II) que para cada punto Z de esta superficie se podian trazar en ella dos rectas: la una EZE″, que pasa por las tres tangentes ET, E′T′, E″T″: la otra ZYX, que se apoya sobre los tres elementos EE′E″, FF′F″, GG′G″. Luego el plano que pasa por las dos rectas EZE″, ZYX es el plano tangente á la superficie gaucha, la mas general, en un punto dado Z de esta superficie.

Esta solucion supone que se sepan tirar tangentes á las curvas que dirigen el movimiento de la recta generatriz: se verá (art. III.) cómo se tiran las tangentes á las curvas quando resultan de la interseccion de dos superficies conocidas, ó que son dadas por la ley del movimiento de un punto generador.

Habiendo tirado un plano tangente á una superficie gaucha, por un punto dado sobre esta superficie, se podria proponer de resolver el problema inverso. „Dado el plano tangente hallar el

1 La figura 50 está en perspectiva. Si todo se refiriese á dos planos perpendiculares entre sí, como en los exemplos que preceden al núm. 30, una sola proyeccion de un punto de la superficie gaucha determinaria la posicion de este punto.

punto de contacto." La solucion seria una conseqüencia fácil de lo que precede.

En efecto, el plano tangente á una superficie gaucha pasa necesariamente por una de las posiciones de la recta generatriz. Sea EE″ el elemento por el qual debe pasar el plano tangente dado. Se prolongará este plano hasta que encuentre las rectas FF″, GG″, y que las corte cada una en un punto; la recta, tirada por los dos puntos de interseccion, tendrá con el elemento EE″ un punto comun, que es el punto de contacto pedido.

Quando un plano toca una superficie desarrollable, el contacto se verifica sobre toda la recta comun al plano y á la superficie; pero quando toca una superficie gaucha, el contacto no tiene lugar sino en un solo punto de la recta que les es comun: en qualquier otro punto de esta recta el plano es secante.

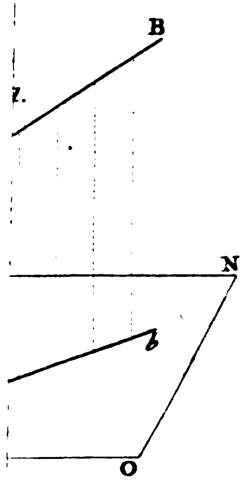


Fig. 3.

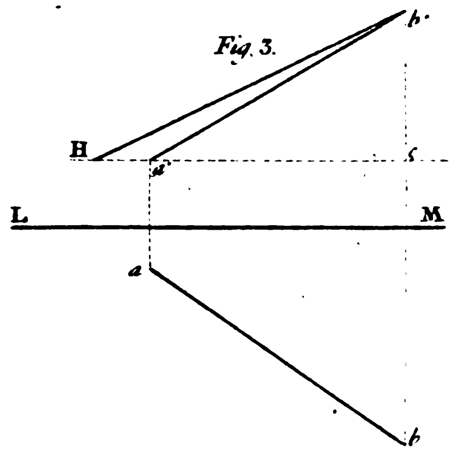


Fig. 2.

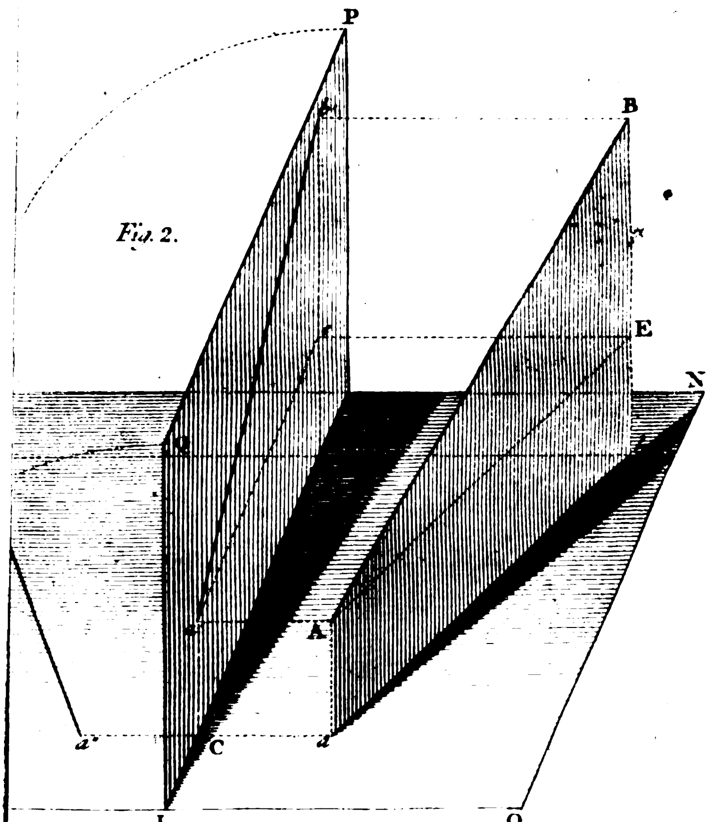


Fig. 8.

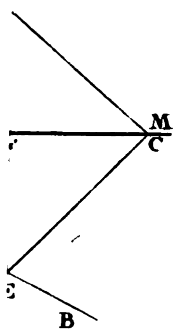


Fig. 9.

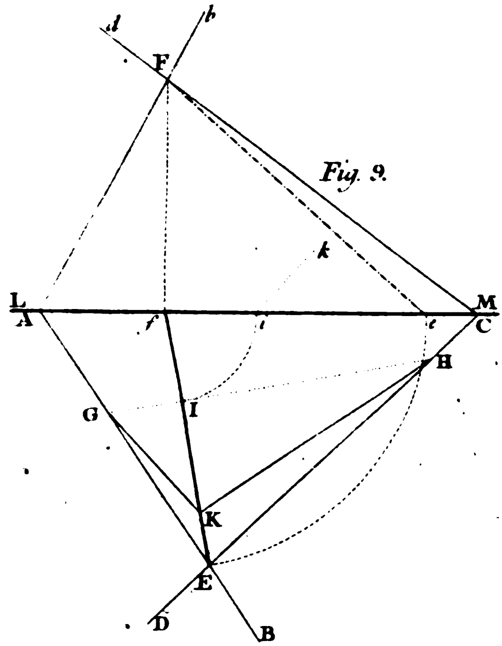


Fig. 10.

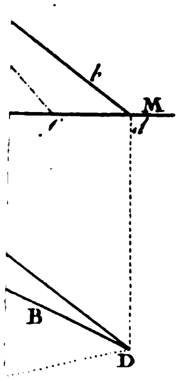
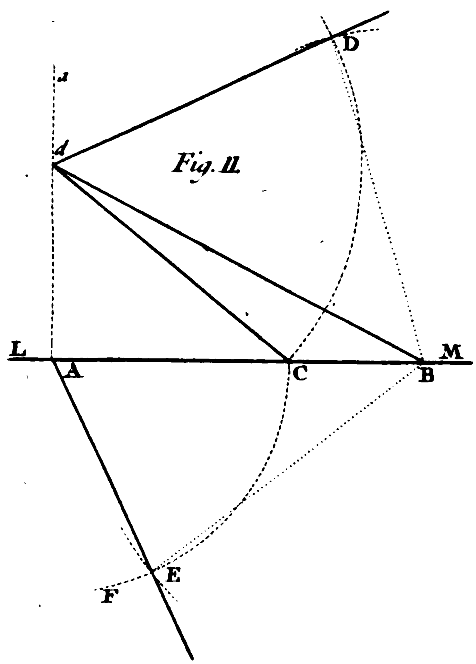


Fig. 11.



Lam. IVa

Fig. 12.

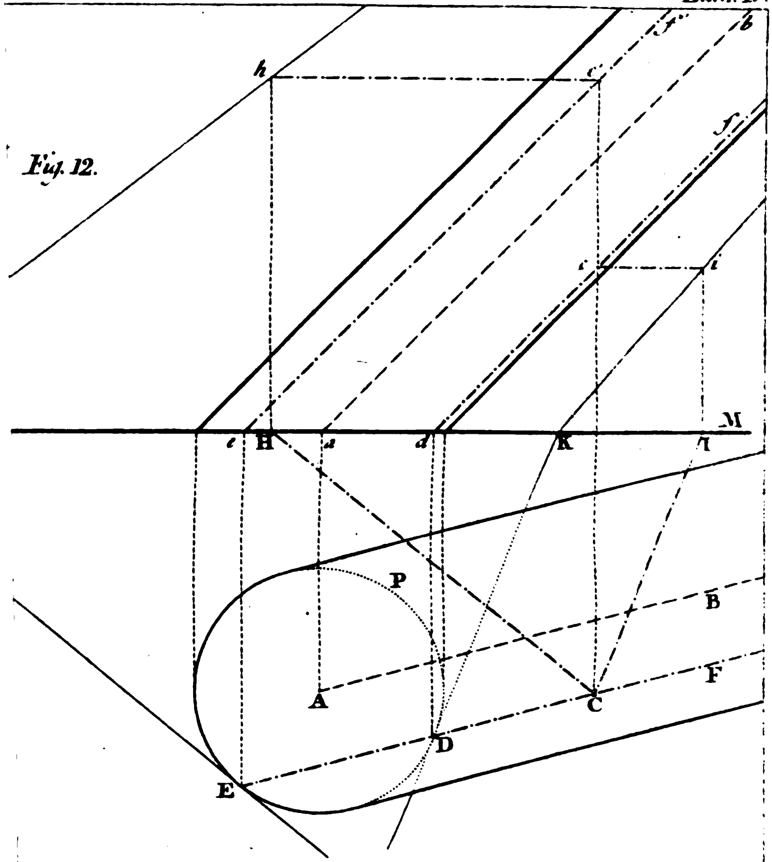
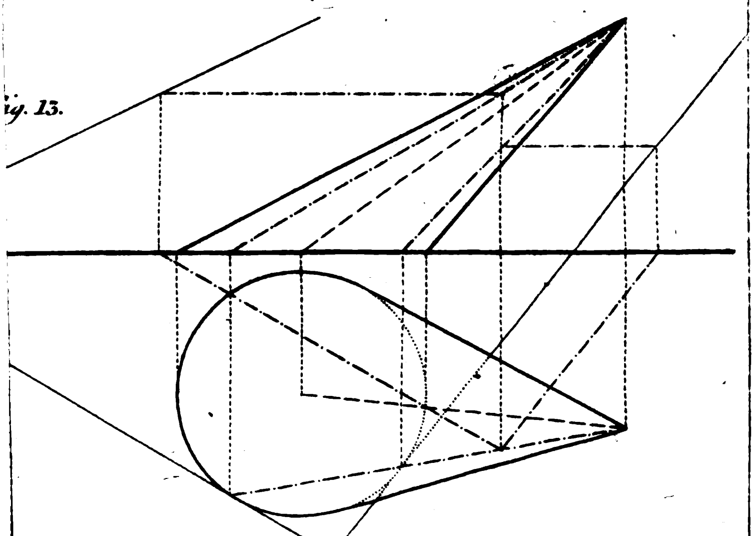


Fig. 13.



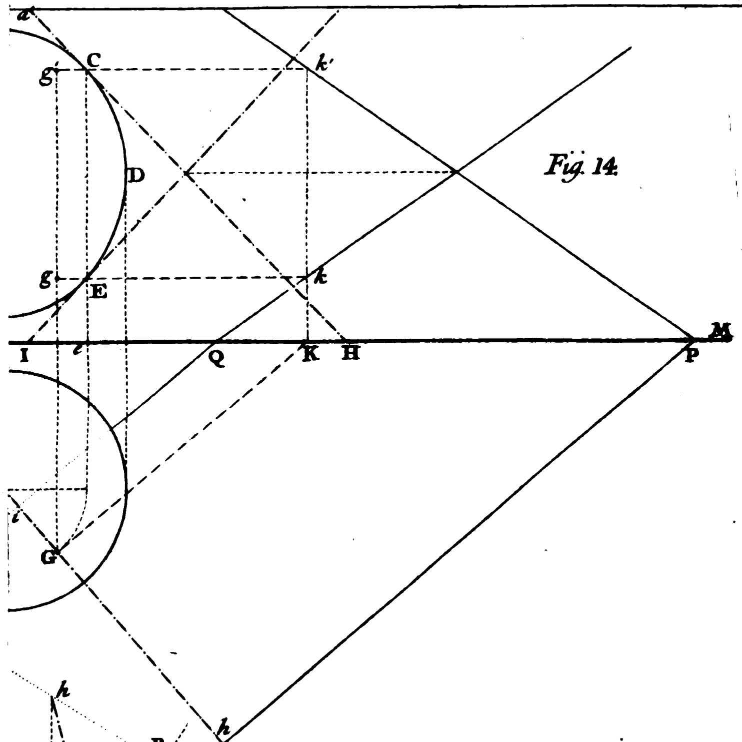


Fig. 14.

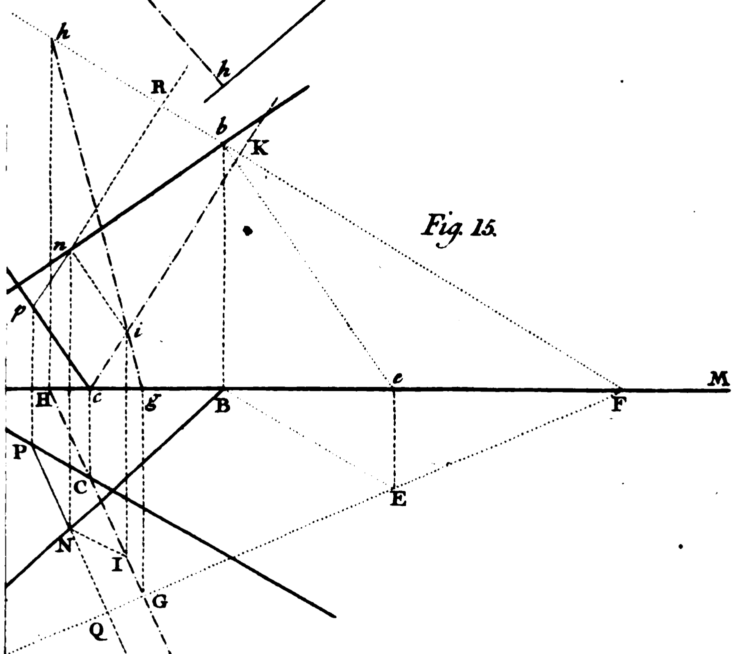


Fig. 15.

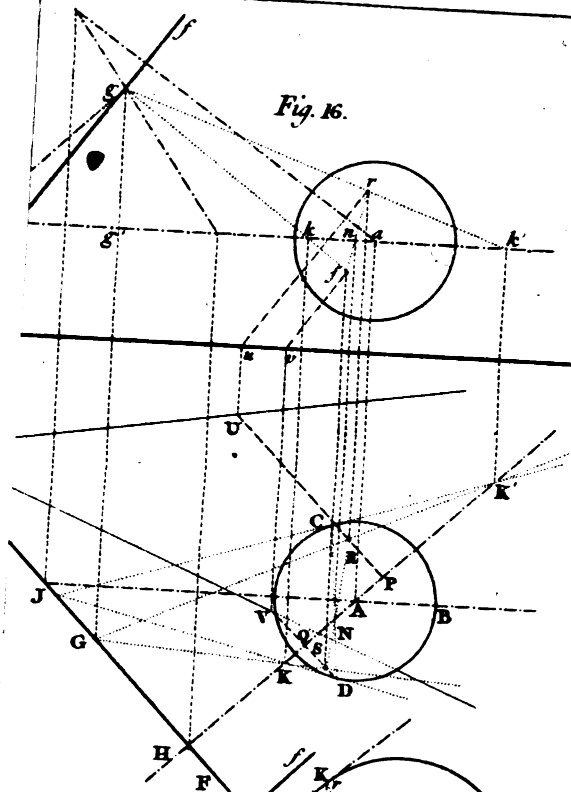

f
g
g'
k
n
a
r
k'
M
U
C
E
P
A
B
J
G
V
Q
N
K
D
H
F
K'

Fig. 16.

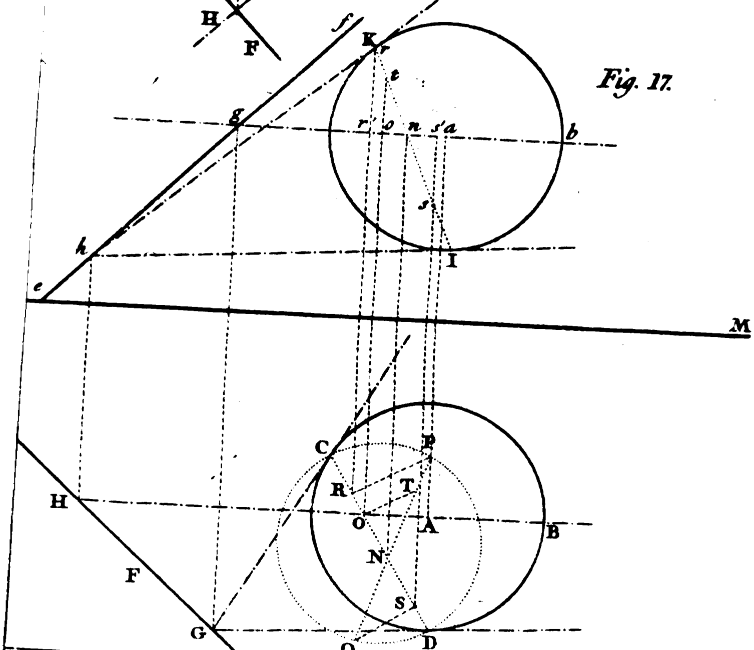

K
r
f
g
t
r'
o
n
s'a
b
s
h
I
e
M
C
P
R
T
H
O
A
B
N
F
S
G
Q
D

Fig. 17.

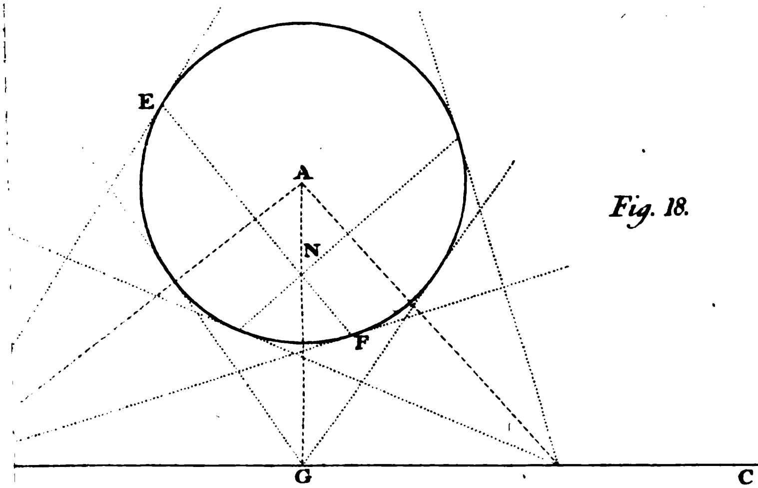


Fig. 18.

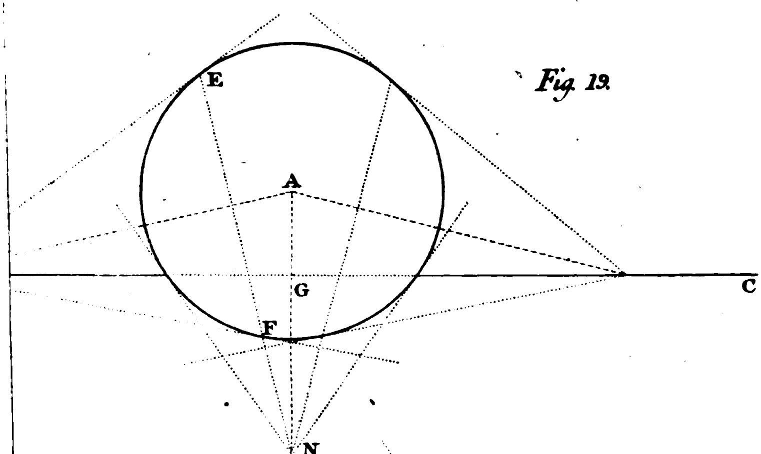


Fig. 19.

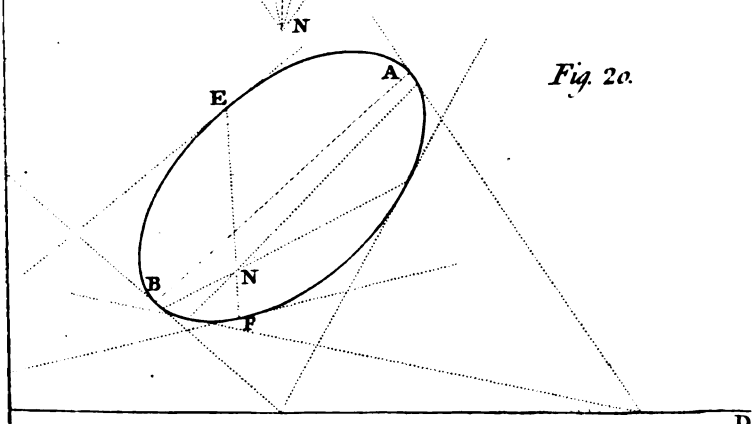


Fig. 20.

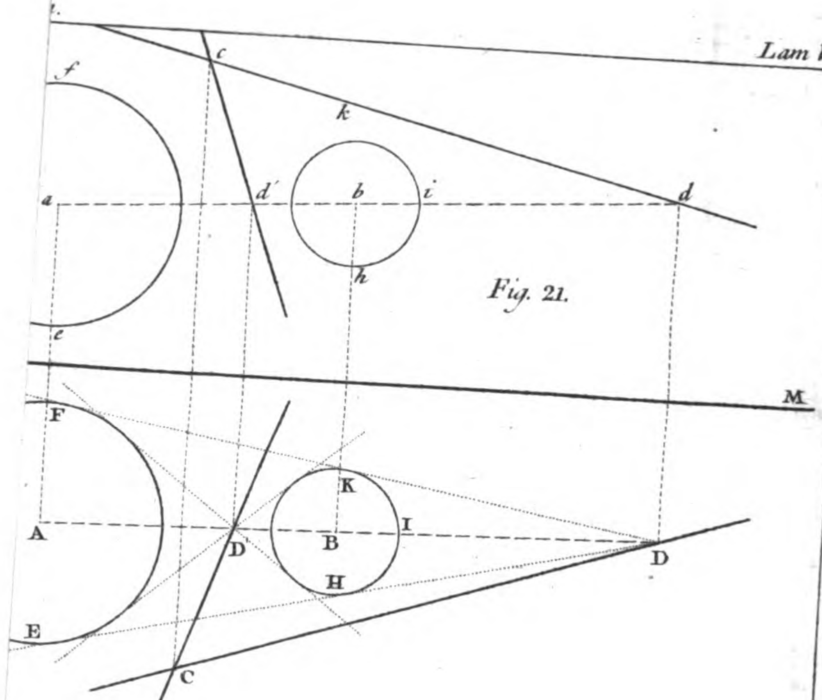


Fig. 21.

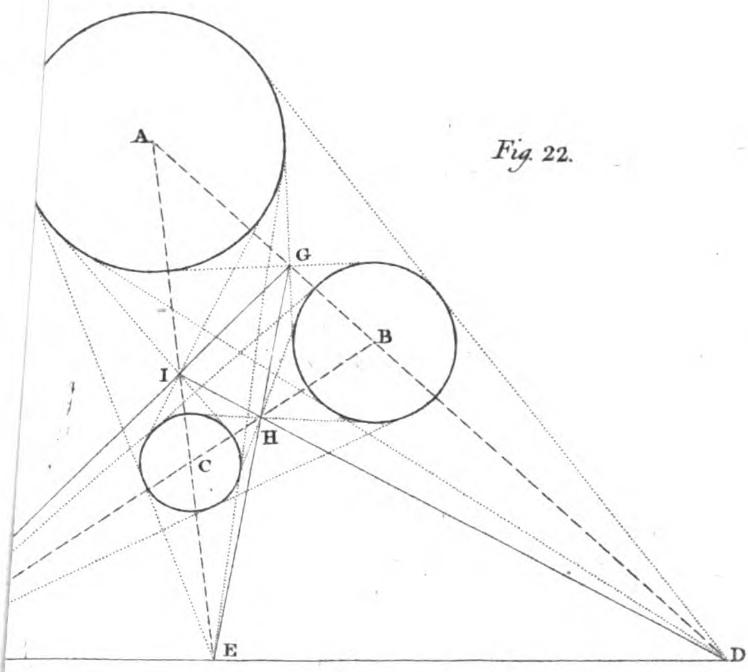


Fig. 22.

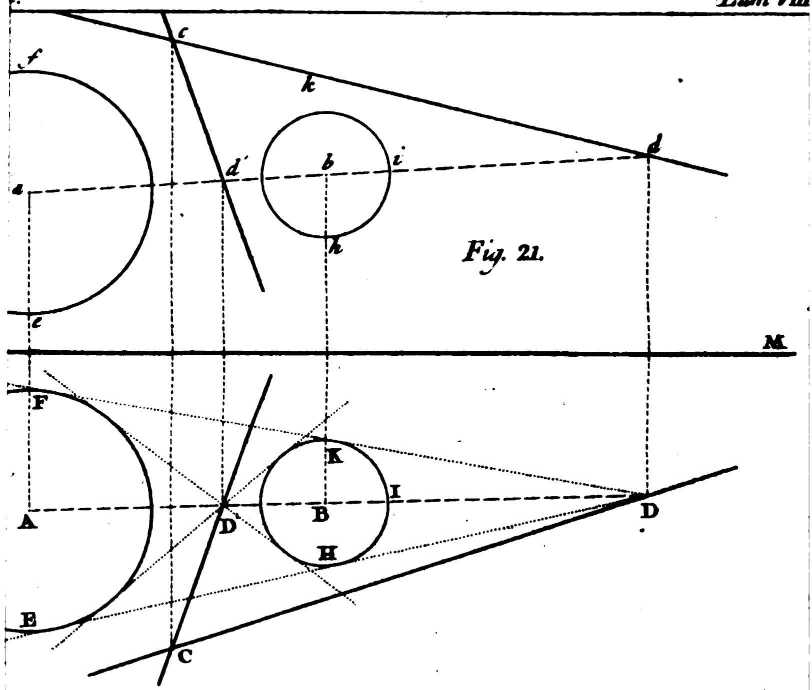


Fig. 21.

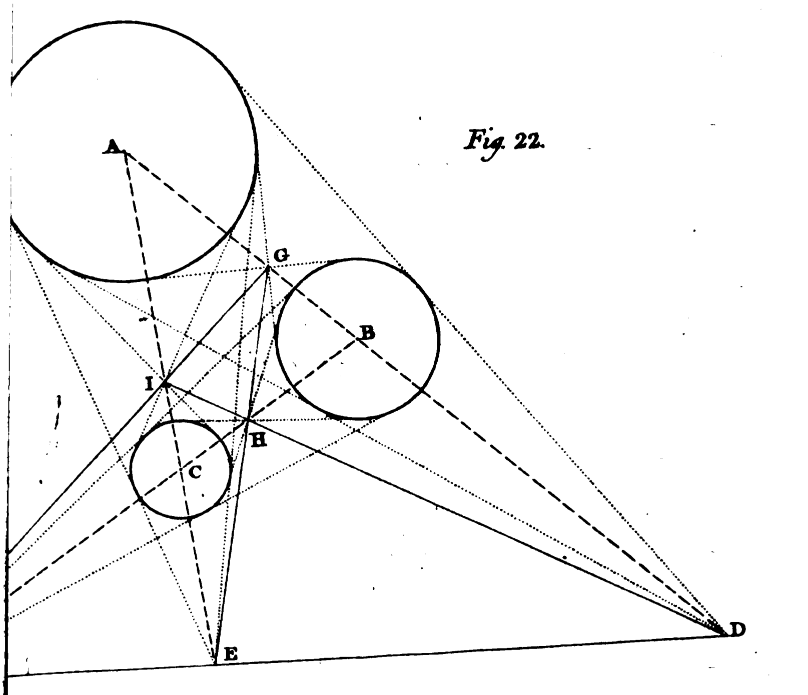


Fig. 22.

(Perspec)tiva.

Lam. IX.

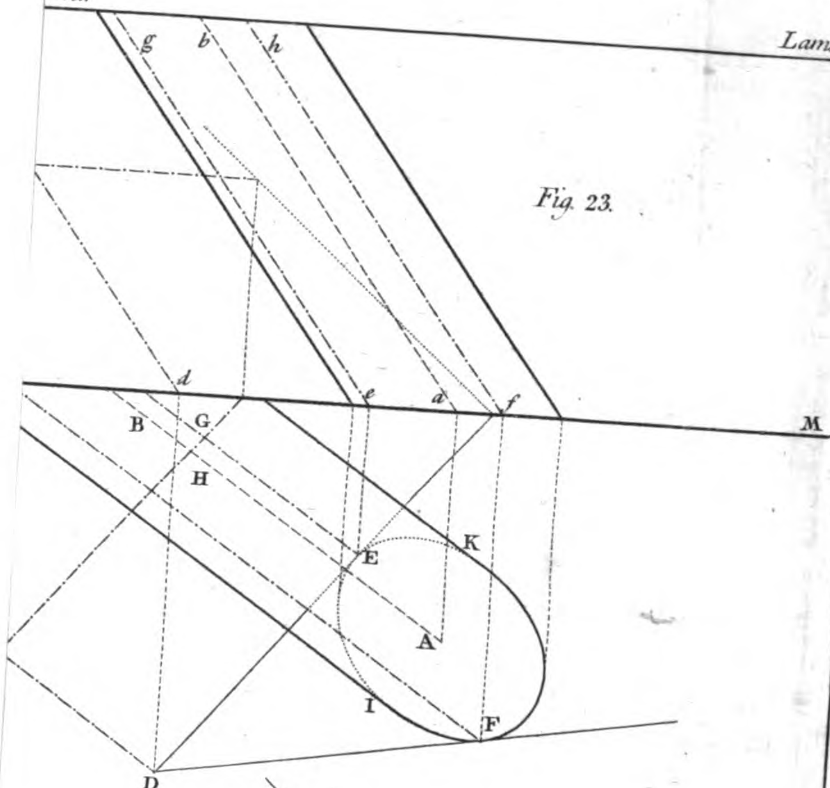


Fig. 23.

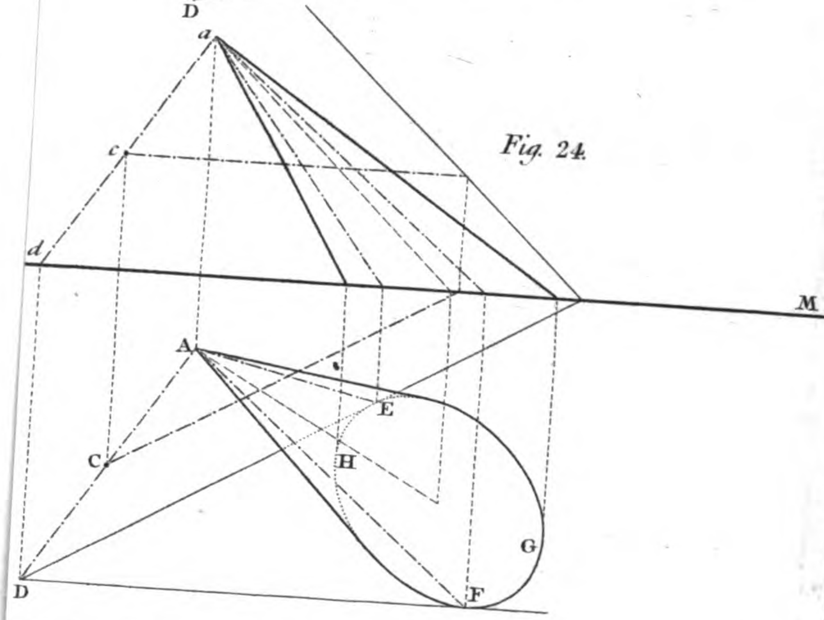


Fig. 24.

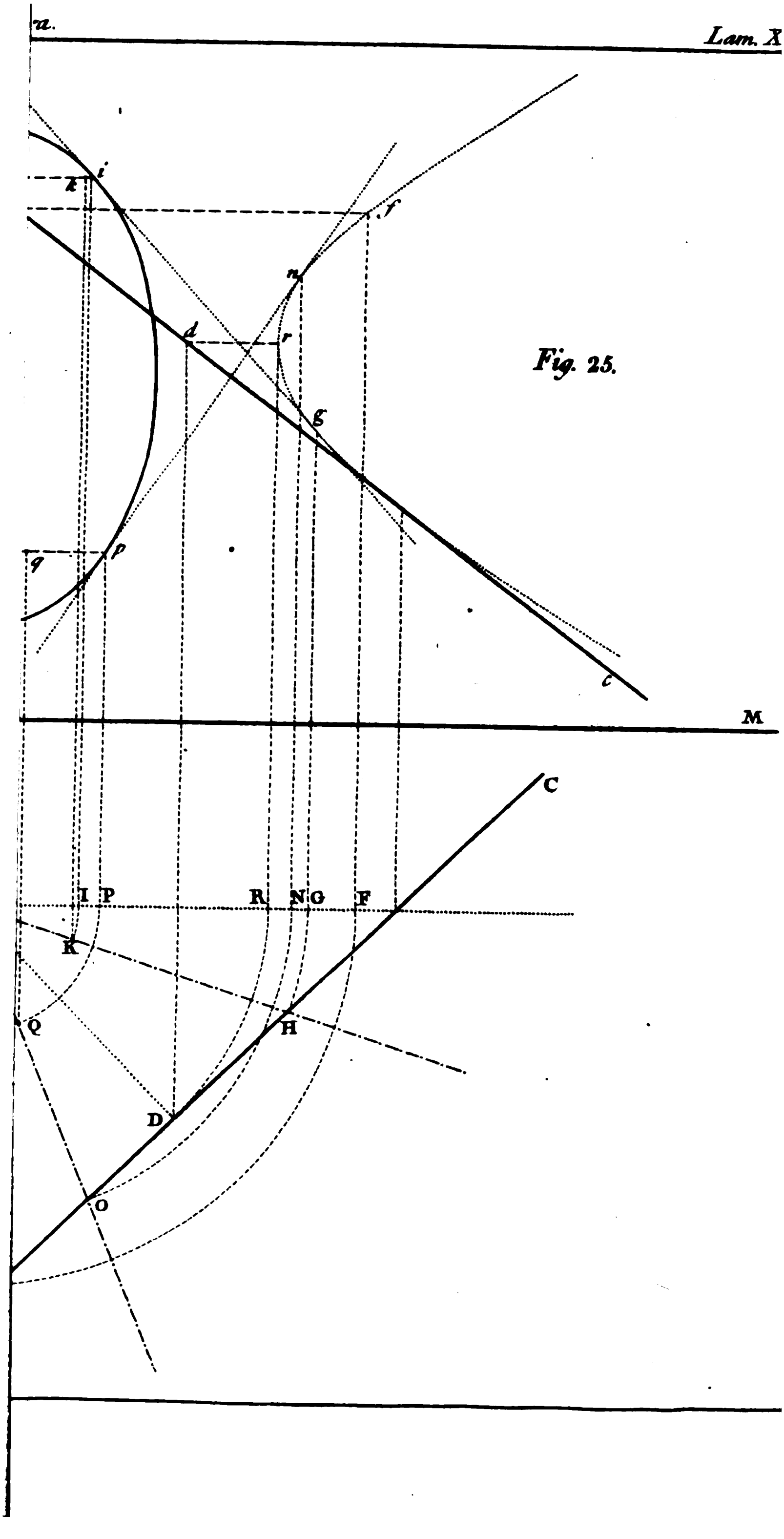


Fig. 25.

Fig. 16.

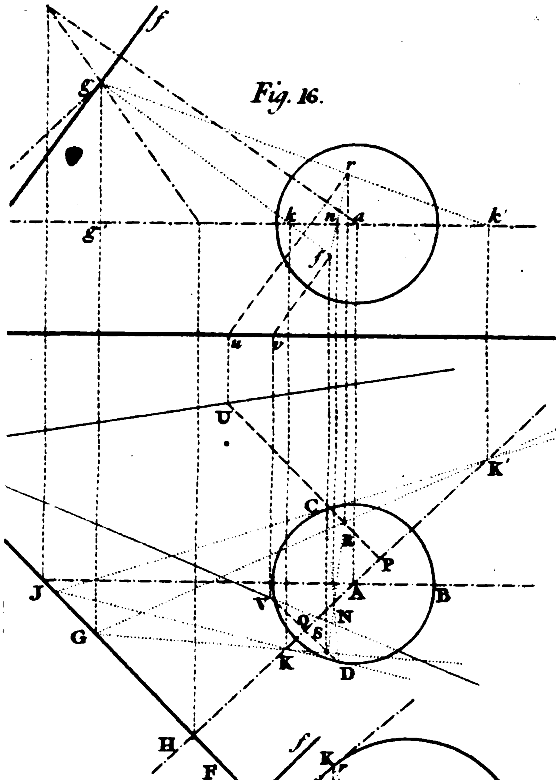
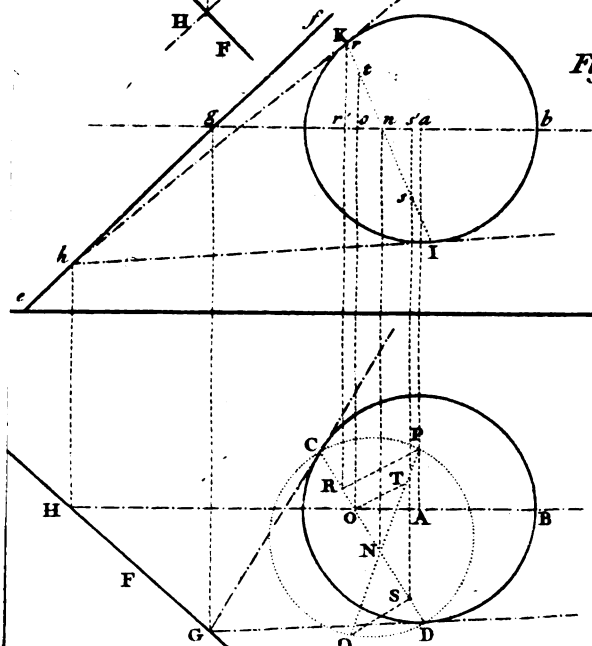

f
g
g'
k
n
a
k'
r
M
u
v
U
K'
C
E
P
J
V
A
B
N
G
Q
S
K
D
H
F

Fig. 17.


f
K
r
t
g
r'
o
n
s
a
b
s
h
I
e
M
C
P
R
T
H
O
A
B
N
F
S
G
Q
D

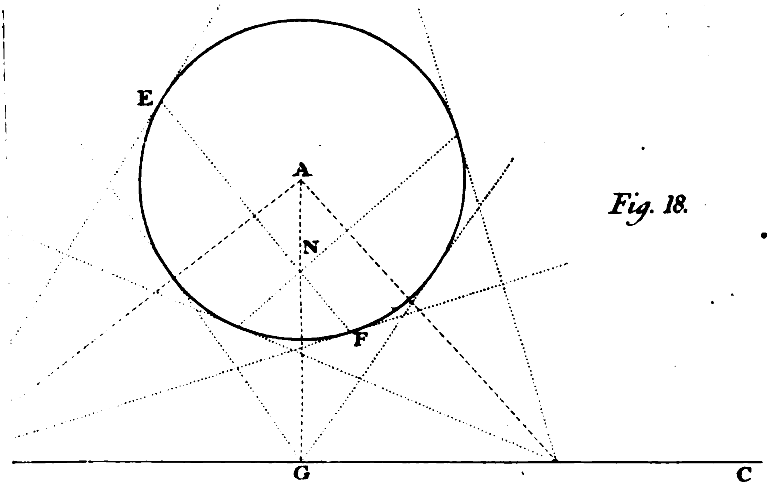


Fig. 18.

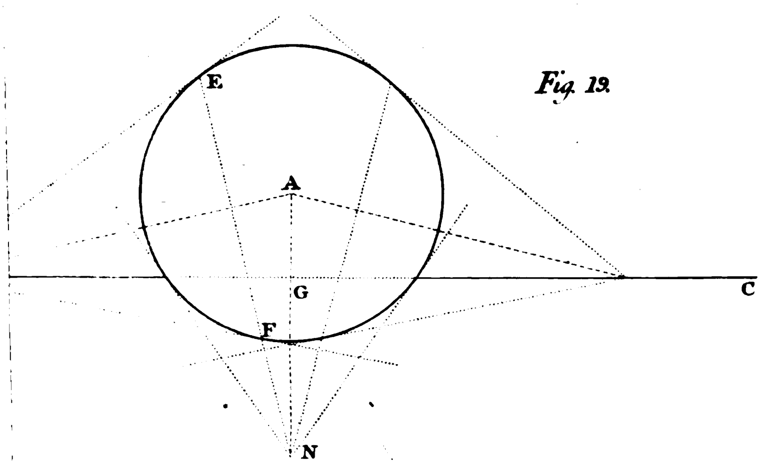


Fig. 19.

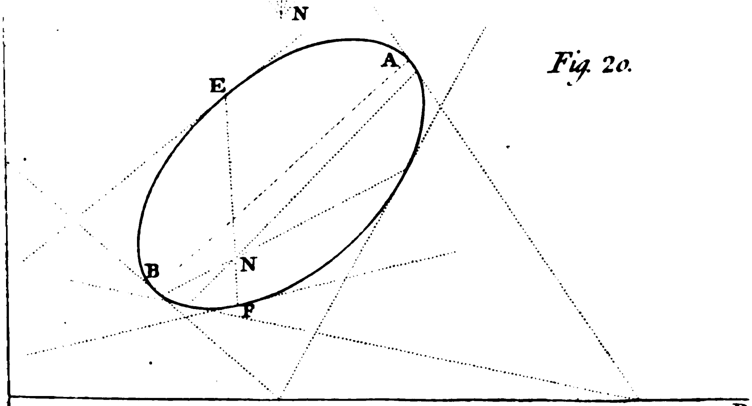


Fig. 20.

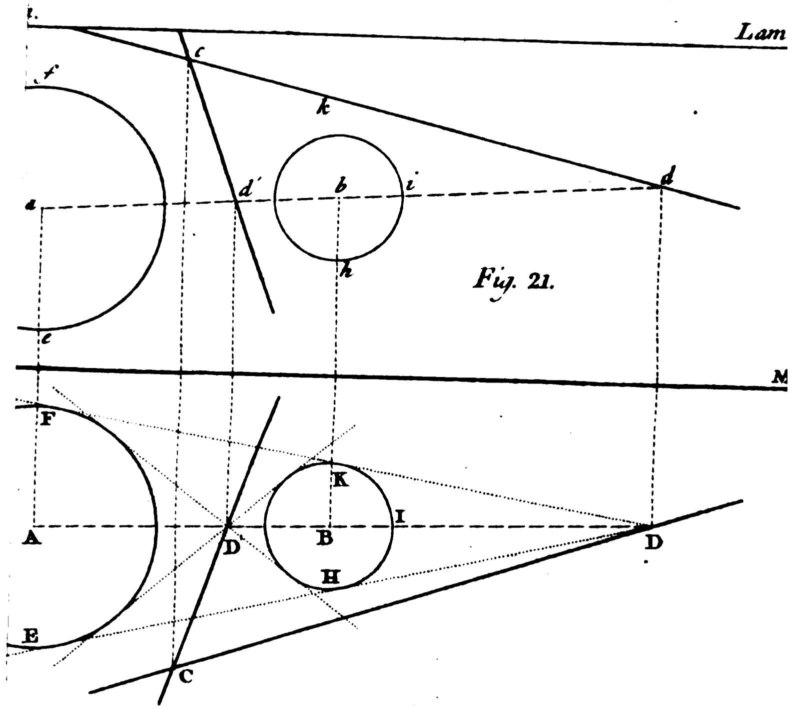


Fig. 21.

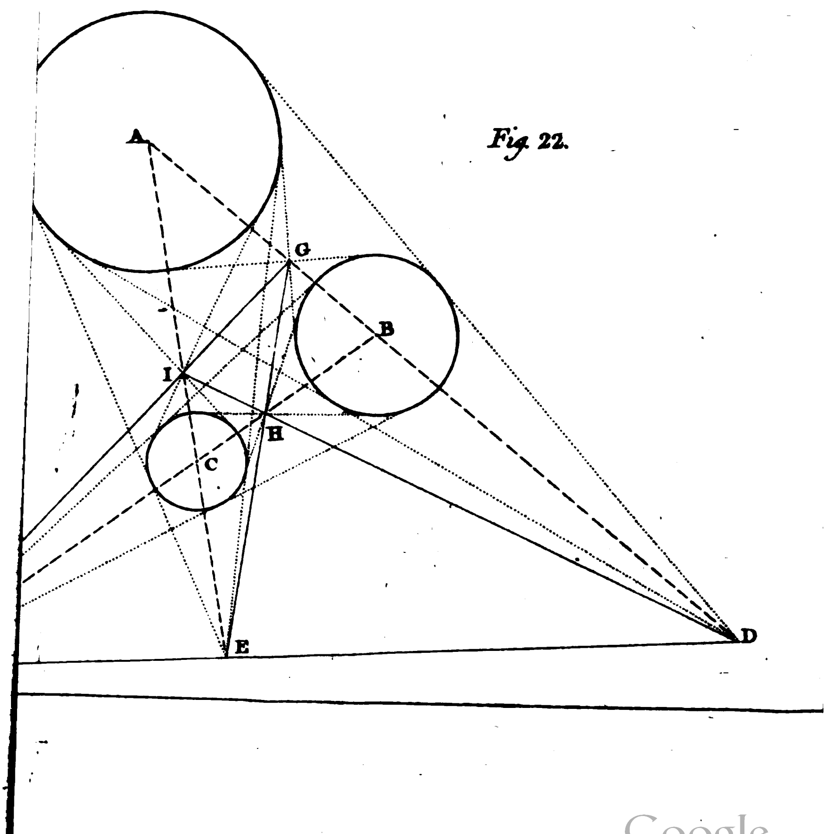


Fig. 22.

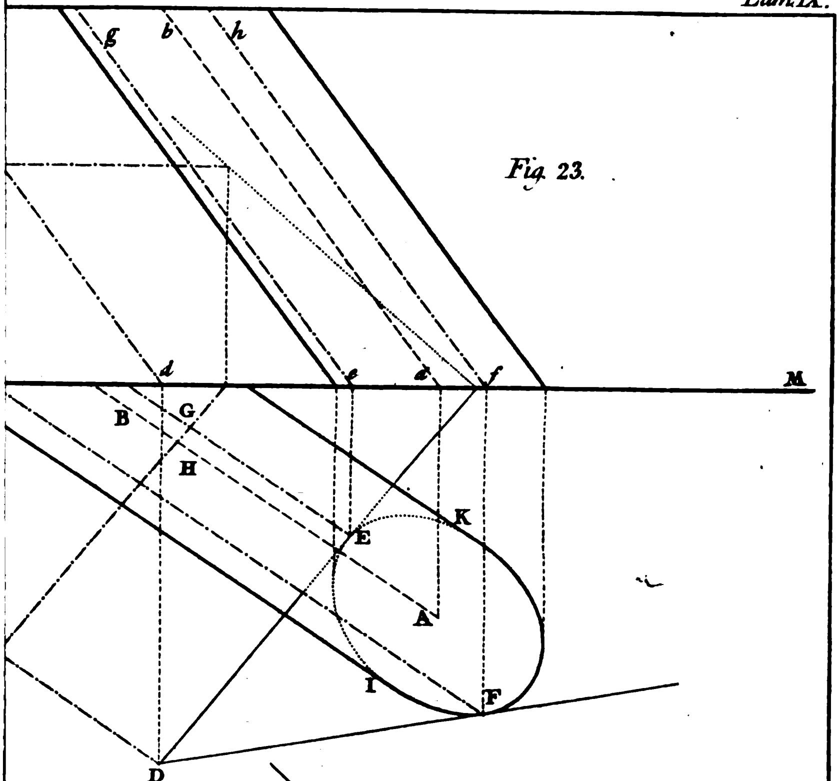


Fig. 23.

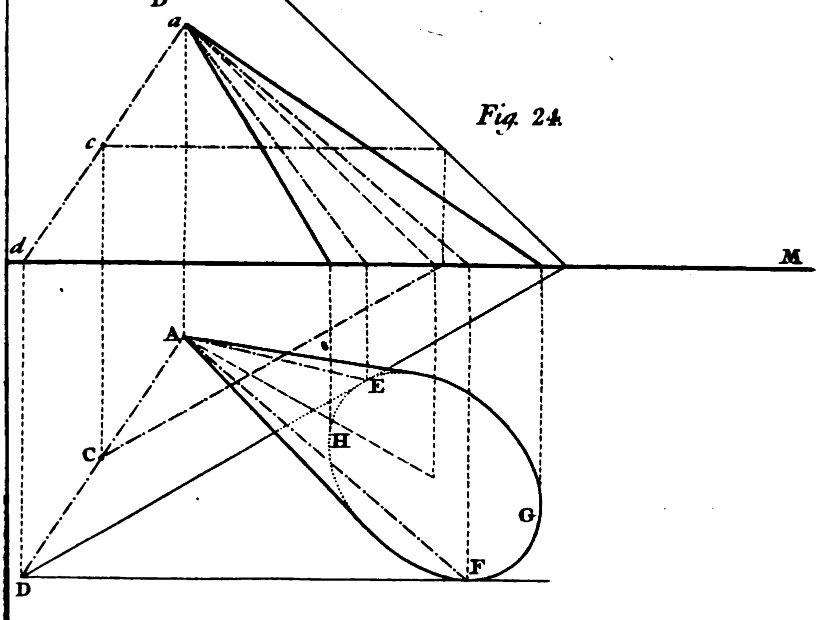


Fig. 24.

Lam. X

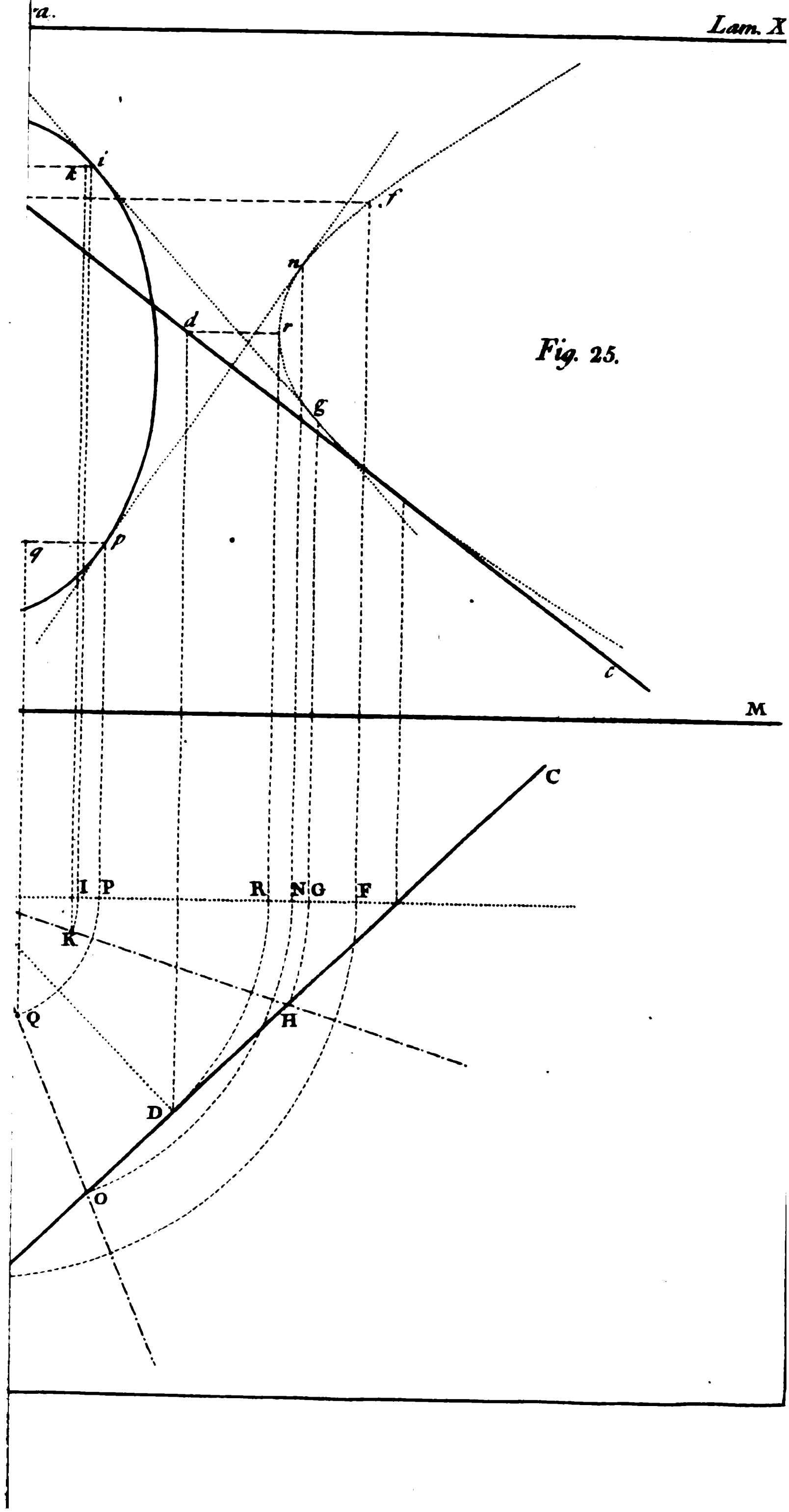
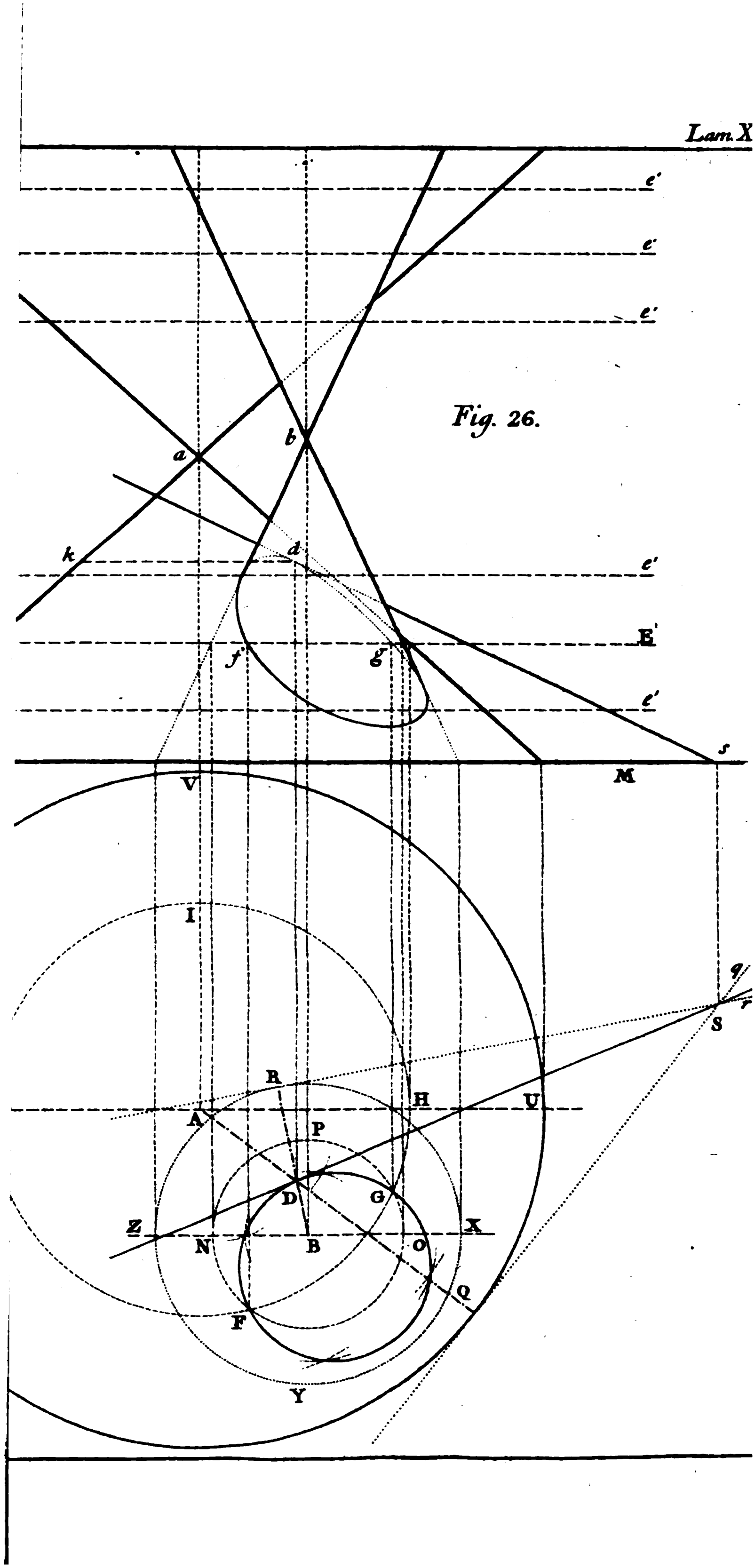


Fig. 25.


Lam. X
Fig. 26.
a
b
k
d
e'
E'
f'
g'
s
M
V
I
q
r
S
R
H
U
A
P
D
G
Z
N
B
O
X
Q
F
Y

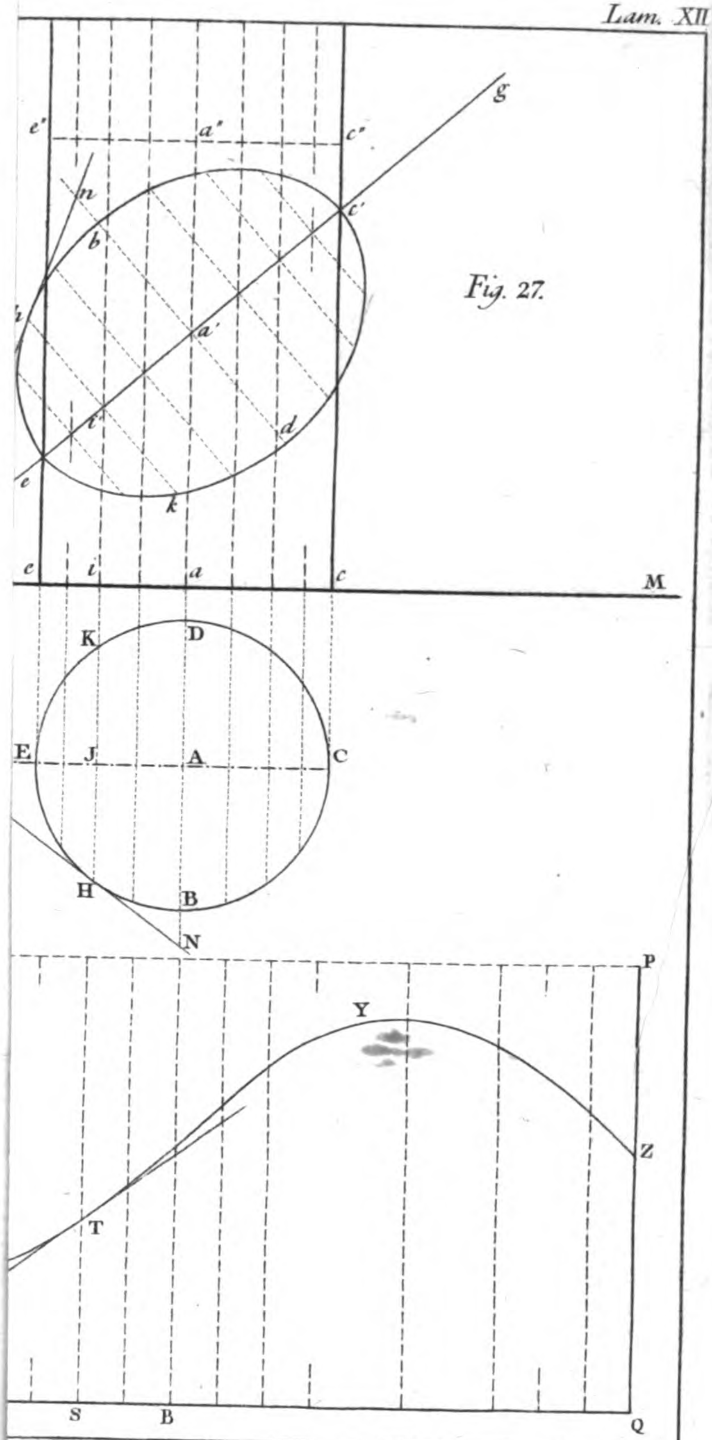
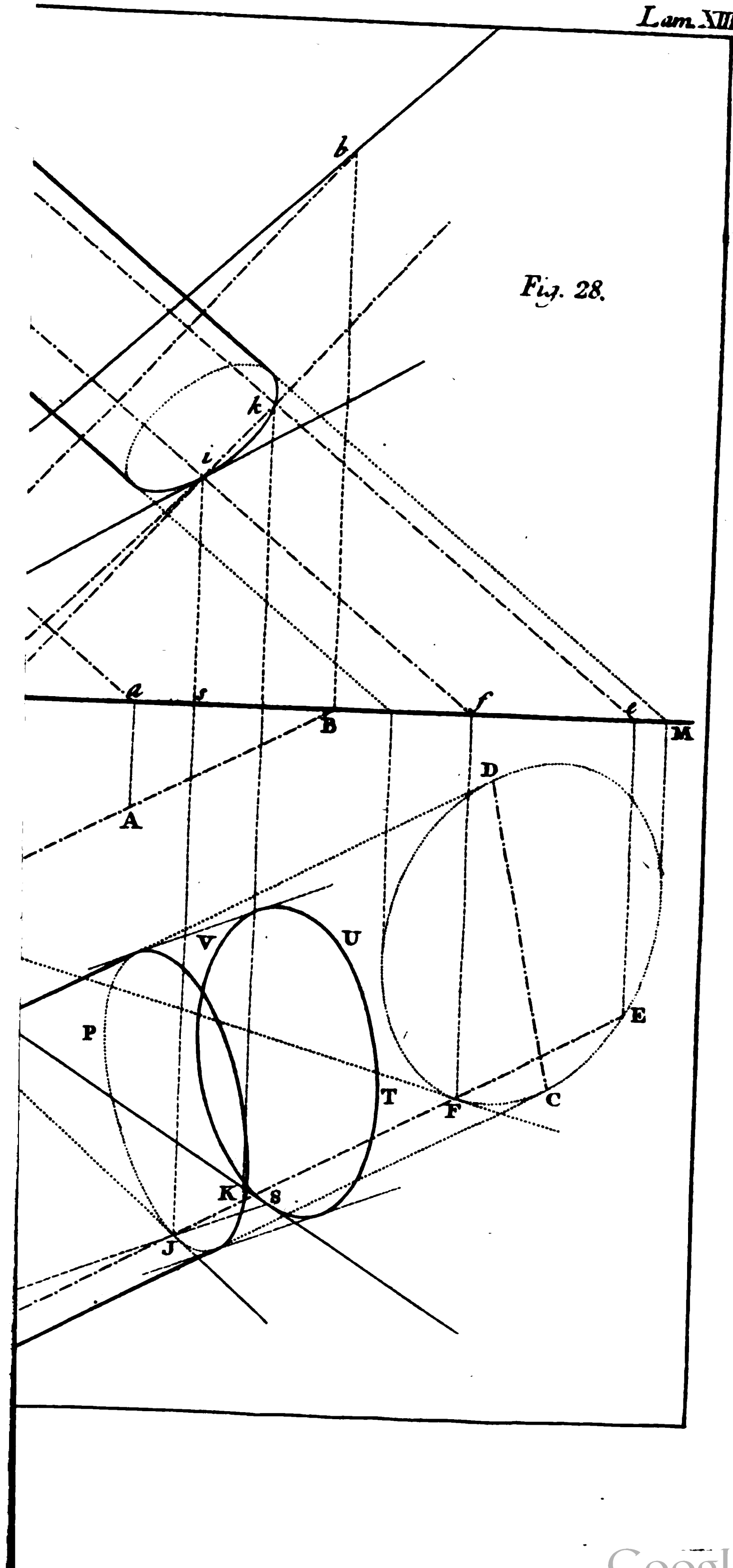
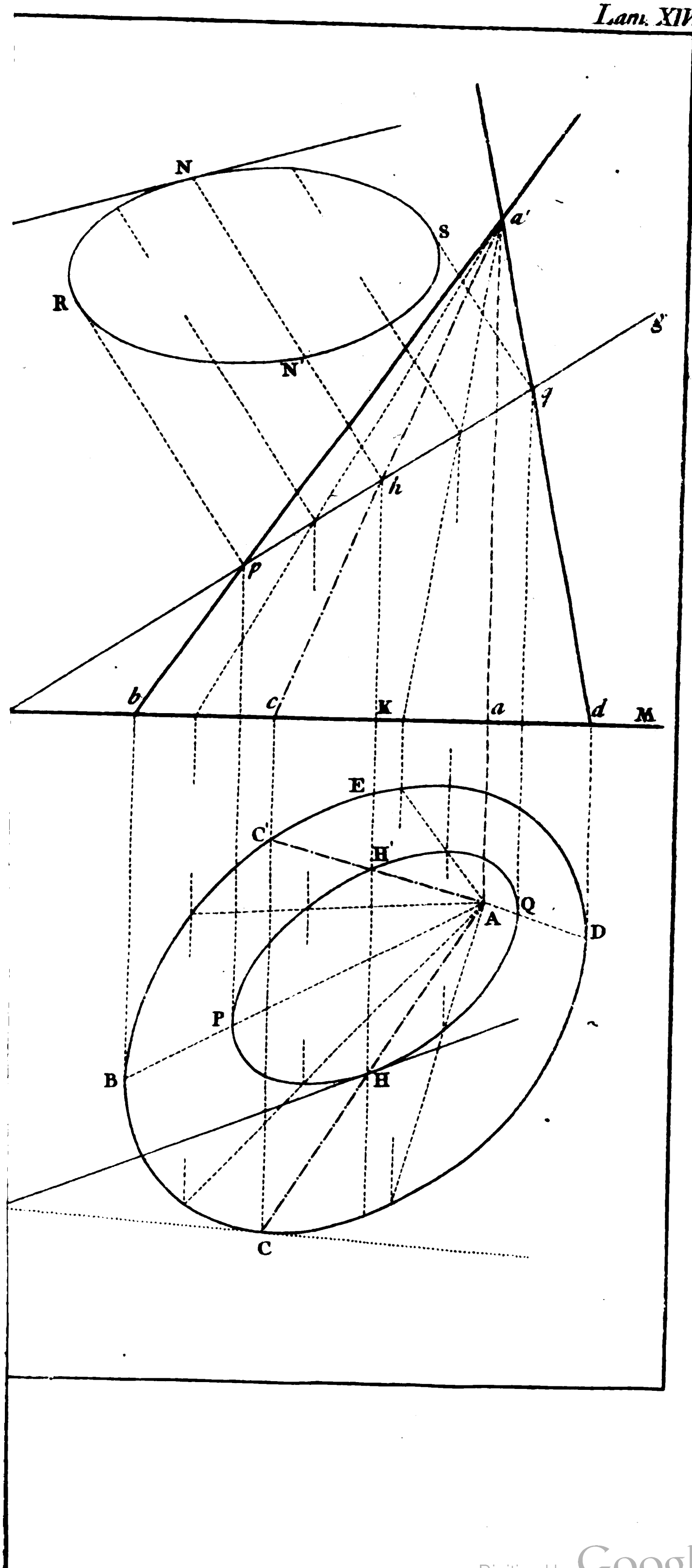


Fig. 27.

Fig. 28.




N
S
a'
R
g'
N'
q
h
p
b
c
K
a
d
M
E
C'
H'
Q
A
D
P
B
H
C

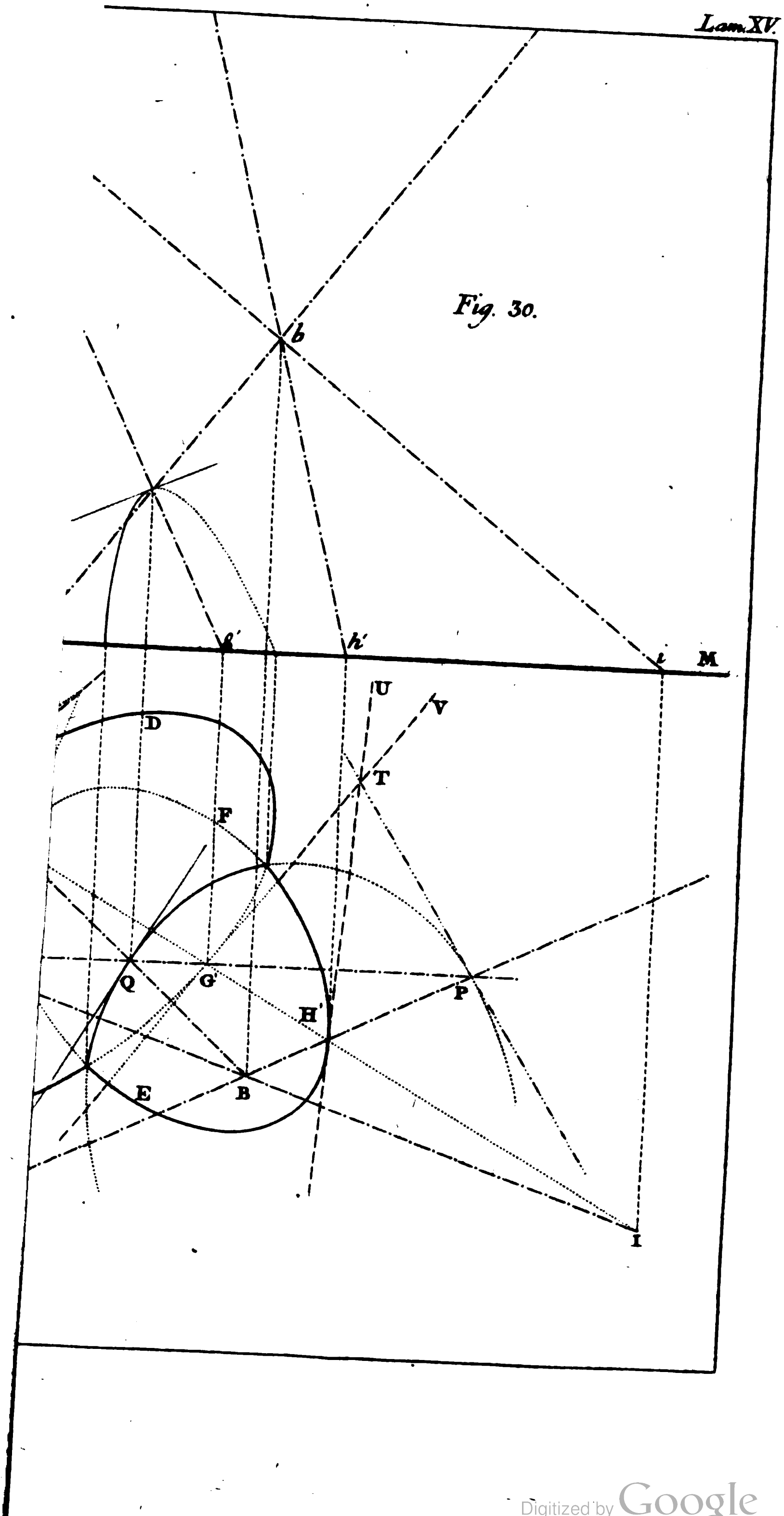


Fig. 30.
b
g'
h'
i
M
U
V
D
T
F
Q
G
P
H'
E
B
I

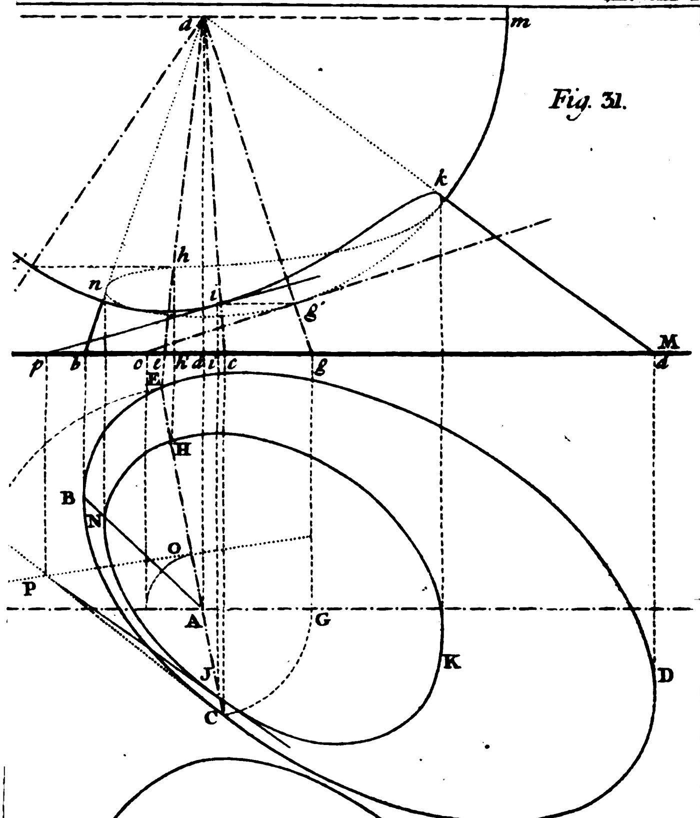


Fig. 31.

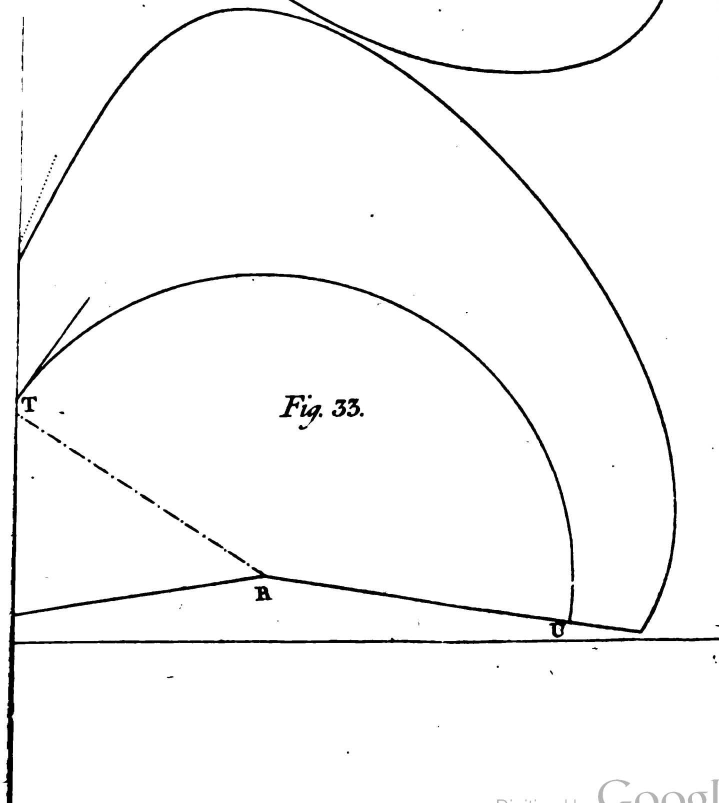


Fig. 33.

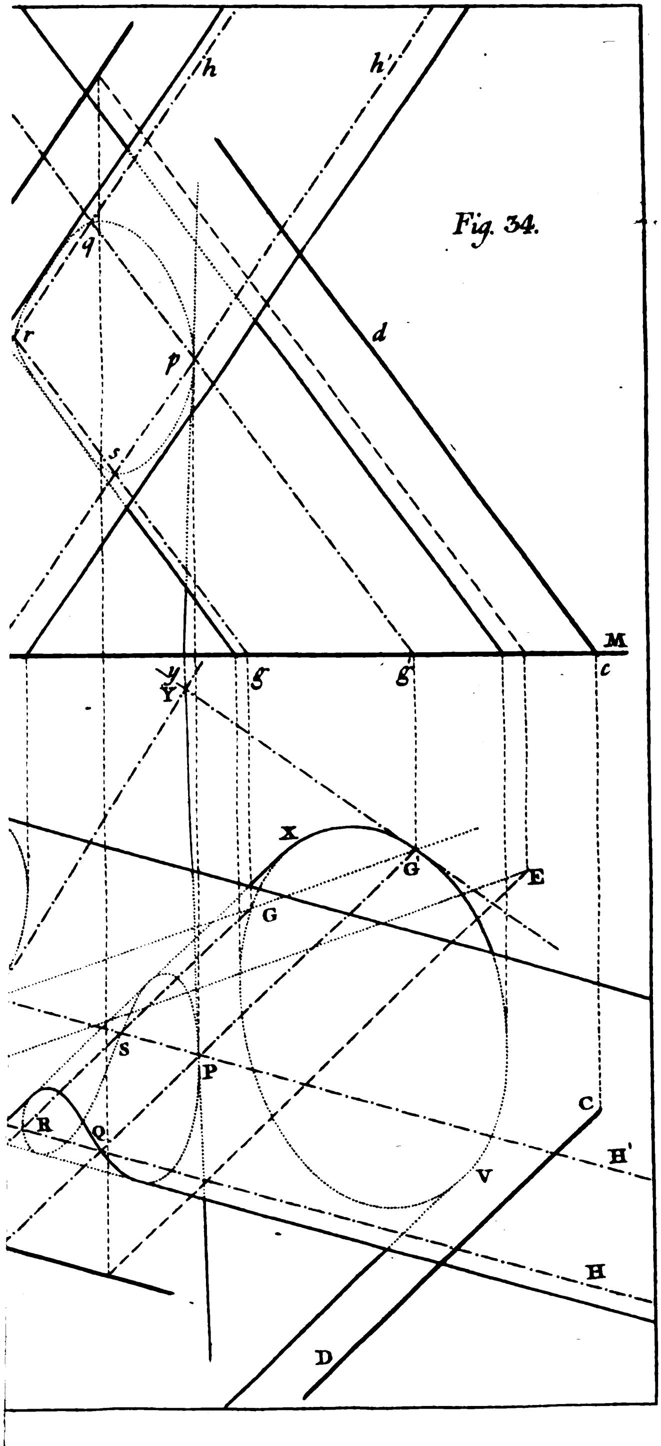
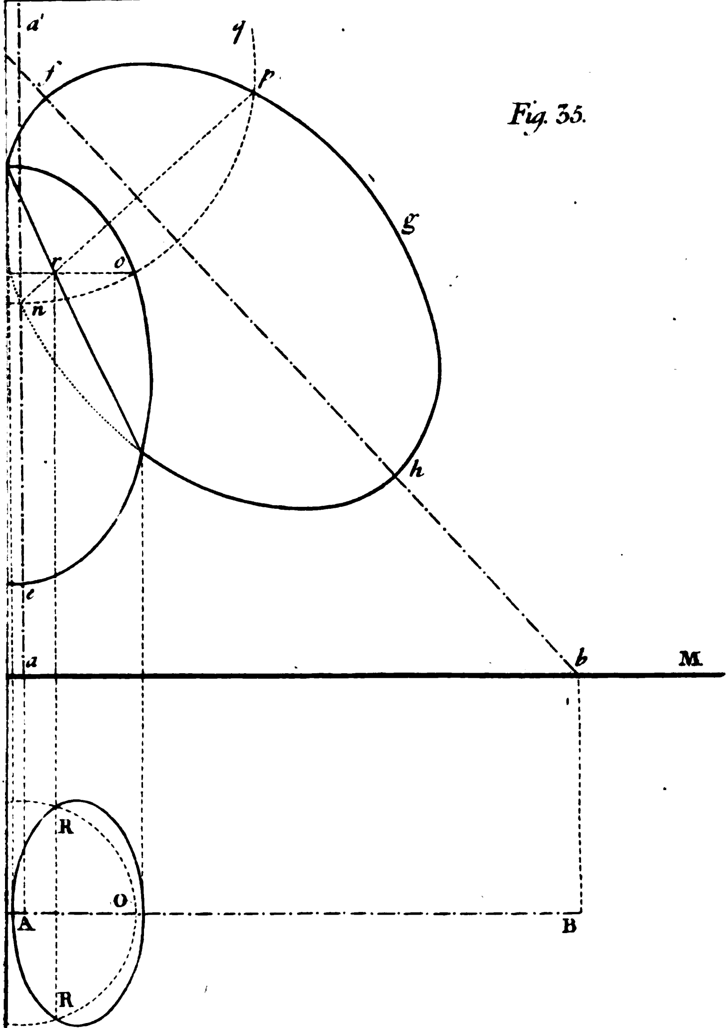


Fig. 34.

Fig. 35.



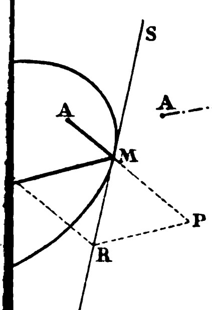


Fig. 37.

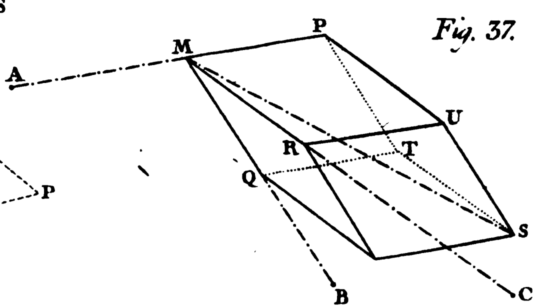
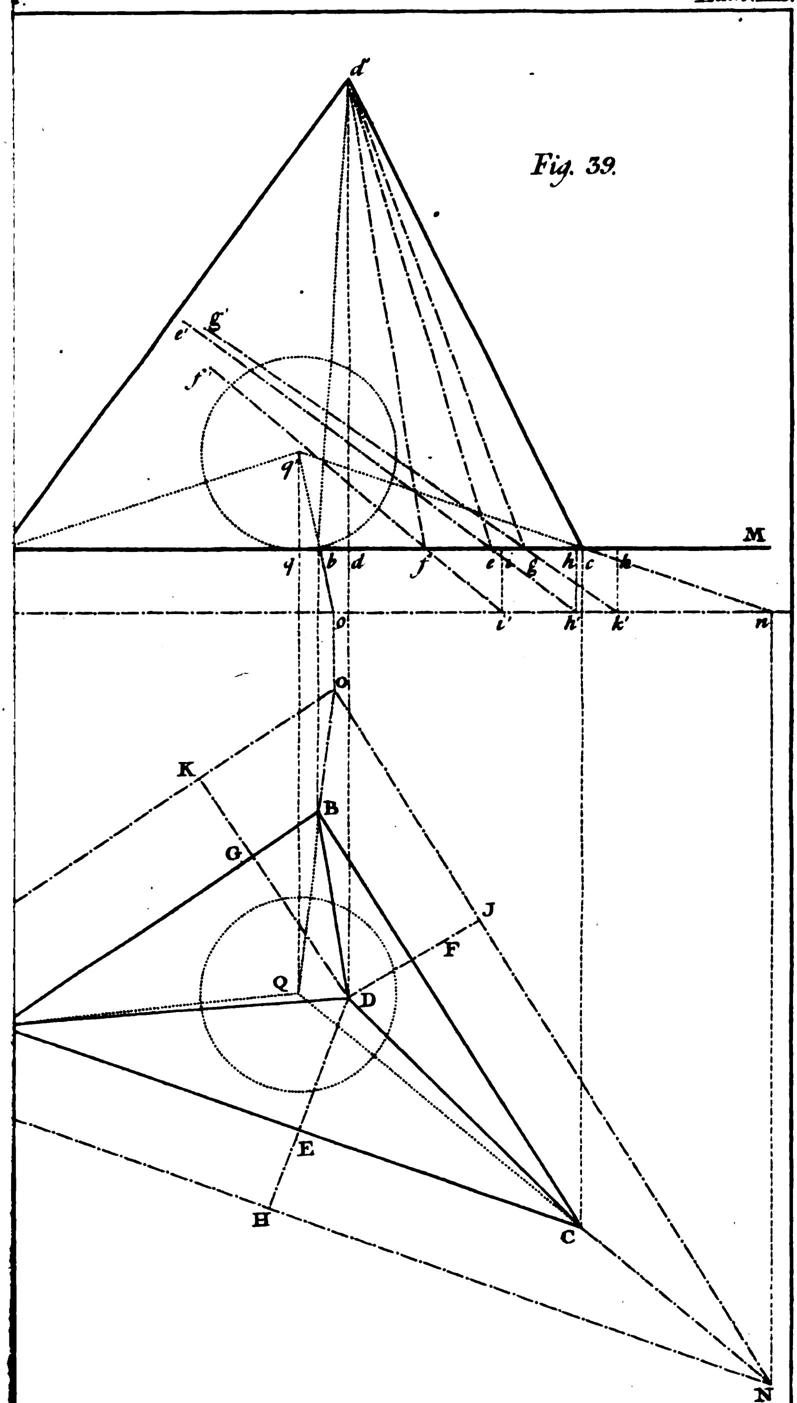


Fig. 39.



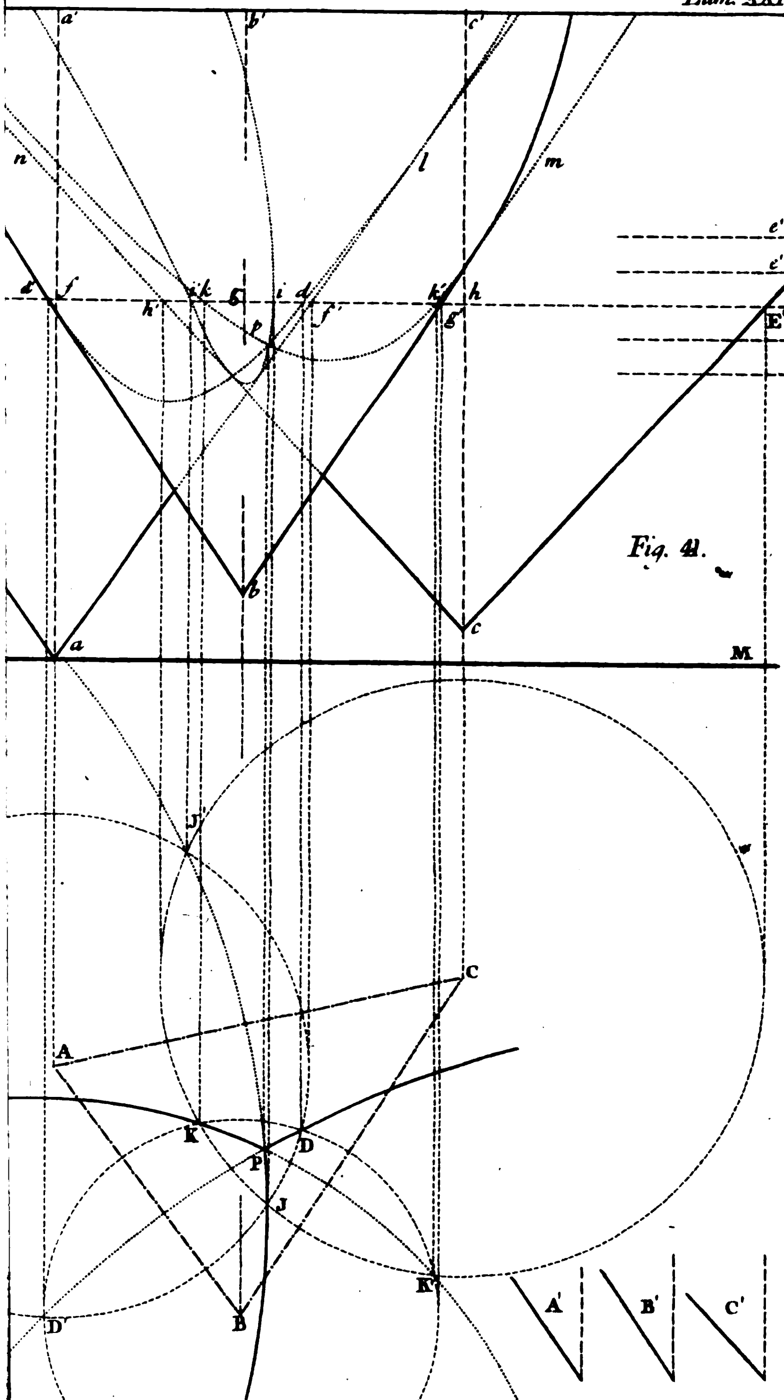
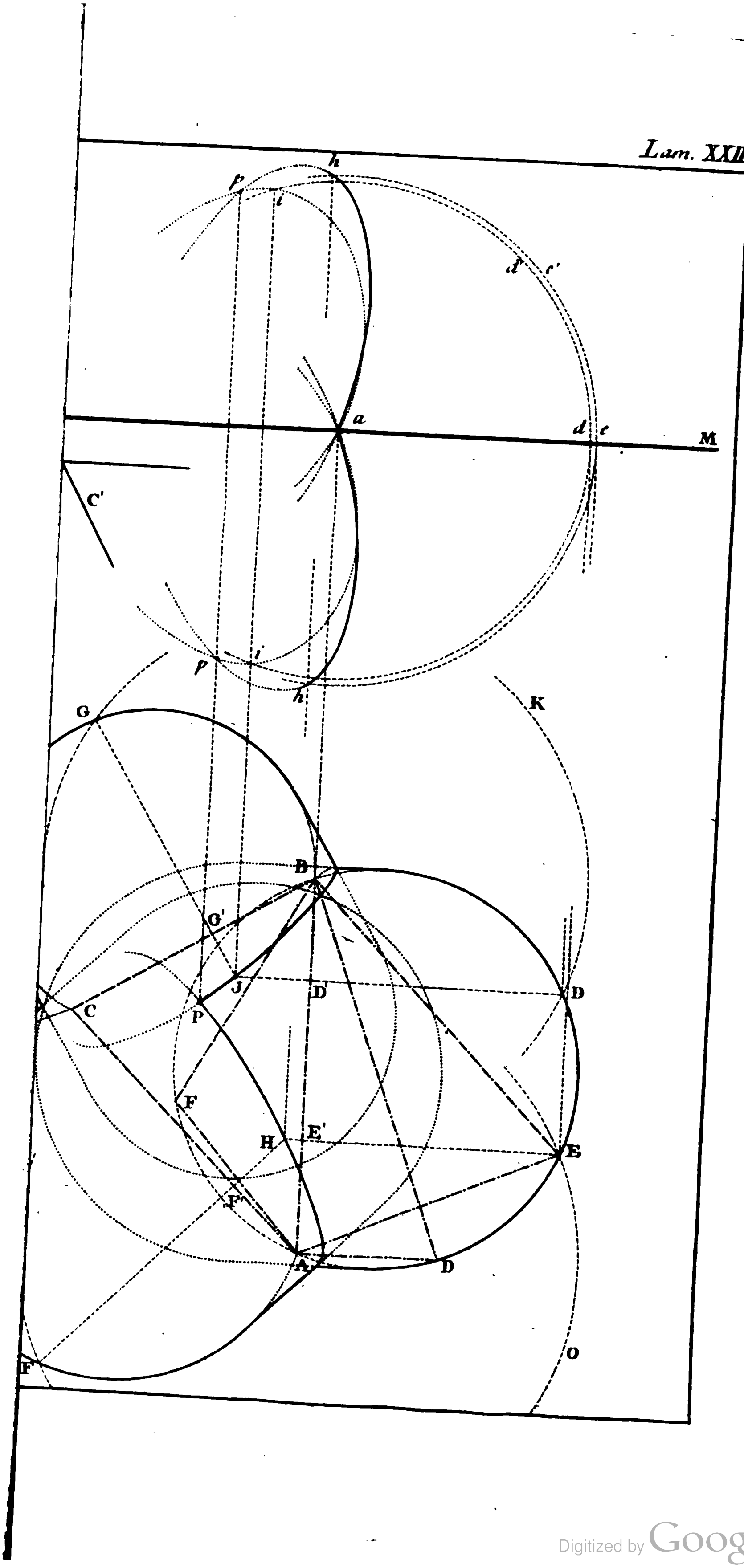


Fig. 41.

Lam. XXII.



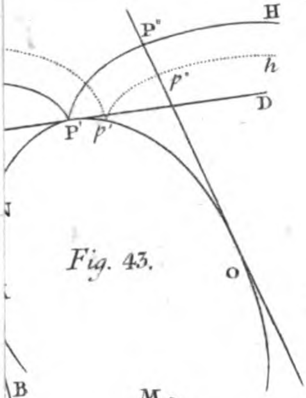
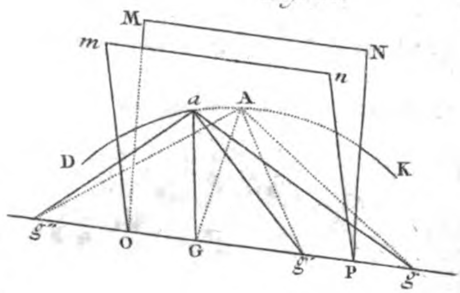


Fig. 43.

Fig. 44.



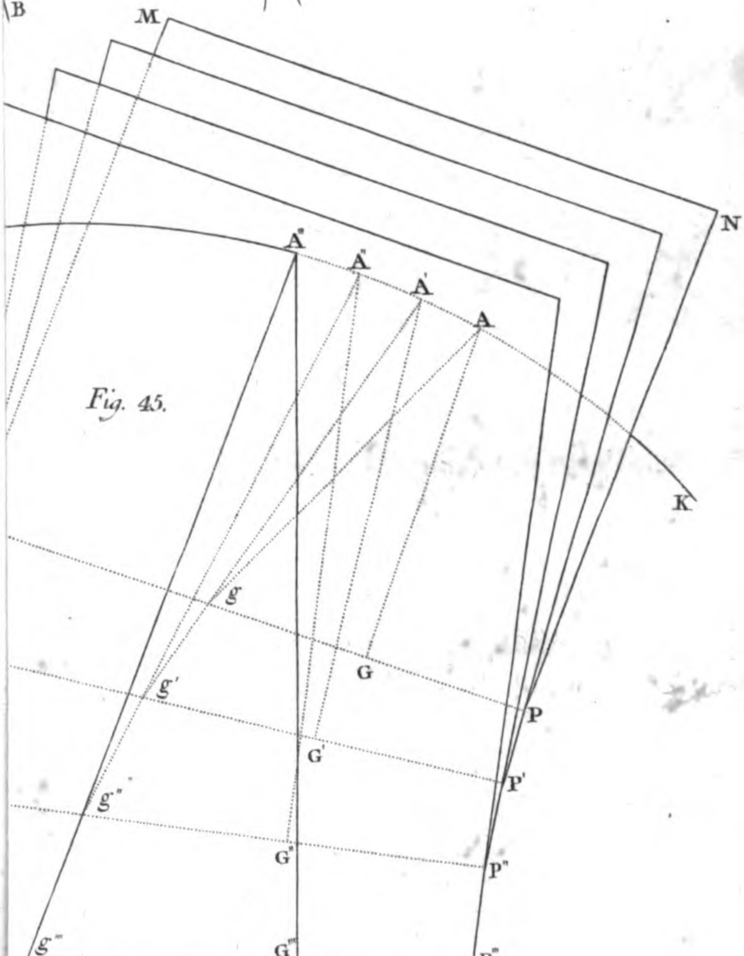


Fig. 45.

Fig. 46.

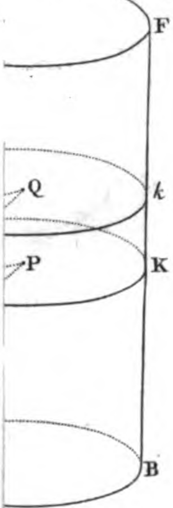


Fig. 47.

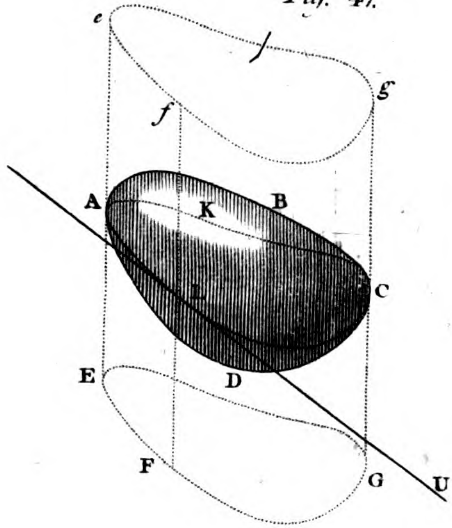
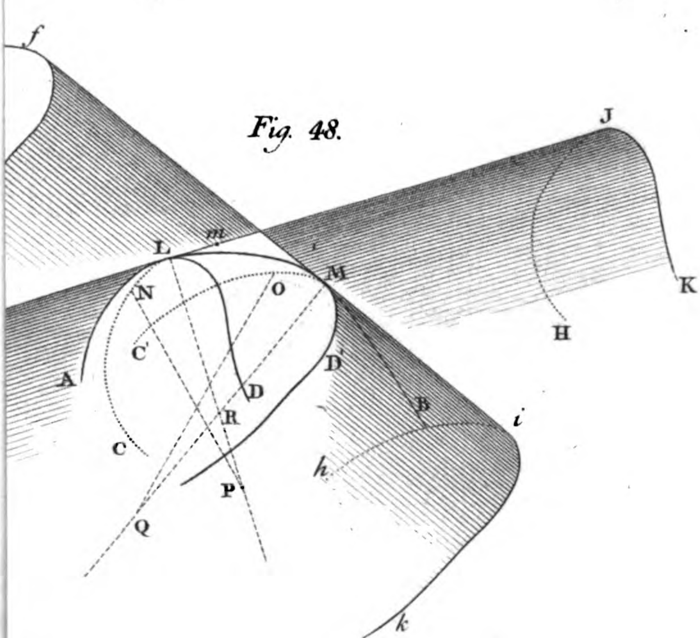


Fig. 48.



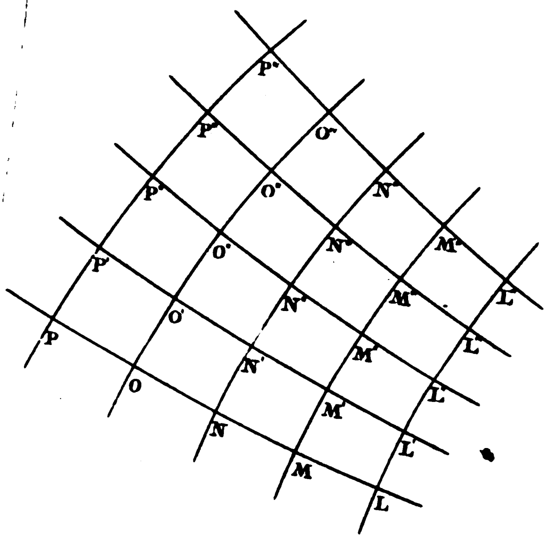


Fig. 49.

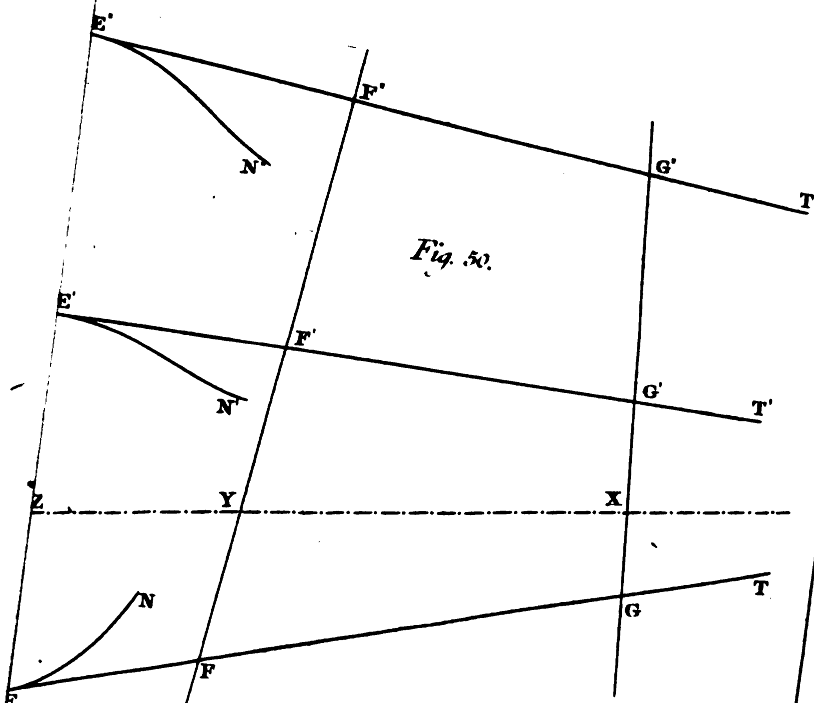


Fig. 50.